

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON  
Laboratoire de Physique



THÈSE

en vue d'obtenir le grade de :

Docteur de l'Université de Lyon, délivré par l'Ecole Normale Supérieure de Lyon

Spécialité : Physique

École Doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon

Soutenance prévue le 28 Juin 2013 par :

**Baptiste PERCIER**

---

**Dynamique d'un empilement granulaire :  
instabilité de tôle ondulée et fluage d'une  
colonne de grains**

---

sous la direction de :

**Nicolas TABERLET**

Après avis de :

Olivier POULIQUEN	Directeur de recherche au CNRS, IUSTI
Patrick RICHARD	directeur de recherche à l'IFSTTAR, Université Nantes Angers le Mans

Devant la commission d'examen formée de :

Yacine AMAROUCHÈNE	Chargé de recherche au CNRS, Université Bordeaux 1,	Examineur
Bruno ANDREOTTI	Professeur, ESPCI	Président
Olivier BONNEFOY	Maître-assistant, EMSE	Examineur
Sébastien MANNEVILLE	Professeur, Université Lyon I – ENS de Lyon	Co-encadrant
Olivier POULIQUEN	Directeur de recherche au CNRS, IUSTI	Rapporteur
Patrick RICHARD	Directeur de recherche à l'IFSTTAR	
	Université Nantes Angers le Mans	Rapporteur
Nicolas TABERLET	Maître de conférence, Université Lyon I – ENS de Lyon	Directeur



« *Tu connais ça, toi, la tôle ondulée ?*

– *C'est avec quoi on couvre les baraques.*

– *Chez nous oui, mais ici c'est la mauvaise route. »*

Dialogue extrait du film *Le salaire de la peur*  
Henri Georges Clouzot (1953).





# Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE	9
<b>0 Milieux granulaires</b>	<b>11</b>
0.1 Instabilités dans un milieu granulaire . . . . .	12
0.1.1 Milieu granulaire vibré . . . . .	12
0.1.2 Grains en écoulement . . . . .	15
0.1.3 Rides et dunes . . . . .	18
0.2 Plan du manuscrit . . . . .	19
 <b>I CONTEXTE DE L'ÉTUDE</b>	 <b>21</b>
<b>1 Présentation</b>	<b>23</b>
<b>2 État de l'art</b>	<b>27</b>
2.1 Premières expériences . . . . .	28
2.2 Tentatives de modélisations . . . . .	28
2.3 Études préliminaires à la thèse . . . . .	32
<b>3 Phénomènes similaires</b>	<b>35</b>
3.1 Usure ondulatoire des rails . . . . .	36
3.1.1 Description . . . . .	36
3.1.2 Origine de l'usure ondulatoire . . . . .	36
3.1.3 Traitement . . . . .	38
3.2 Dunes et rides de sable . . . . .	39
3.2.1 Description . . . . .	39
3.2.2 Intérêt . . . . .	40
3.3 Broutement . . . . .	41
3.4 Formation des bosses en ski . . . . .	43
3.5 Autres phénomènes de formation de rides . . . . .	44
3.5.1 Rouleau d'impression . . . . .	44
3.5.2 Motifs laissés par une pointe d'AFM . . . . .	45
3.5.3 Disques durs . . . . .	45
3.5.4 Ricochets . . . . .	47
3.6 Synthèse . . . . .	47

<b>II</b>	<b>UNE MODÉLISATION SIMPLIFIÉE DE LA TÔLE ONDULÉE</b>	<b>49</b>
<b>1</b>	<b>Expériences et simulations</b>	<b>51</b>
1.1	Expériences . . . . .	52
1.2	Simulations numériques . . . . .	56
1.2.1	Introduction . . . . .	56
1.2.2	Algorithme . . . . .	56
1.2.3	Détection des collisions . . . . .	57
1.2.4	Modèle de force . . . . .	58
1.2.5	Intégration . . . . .	59
1.2.6	Cas particuliers des simulations de tôle ondulée . . . . .	60
<b>2</b>	<b>Caractéristiques de la tôle ondulée</b>	<b>65</b>
2.1	Caractéristiques et vitesses critiques . . . . .	66
2.2	Relation de dispersion . . . . .	70
2.3	Type de bifurcation . . . . .	74
2.4	Conclusion . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Mesures de forces en régime stationnaire</b>	<b>81</b>
3.1	Introduction . . . . .	82
3.2	État stationnaire . . . . .	82
3.2.1	Phénomène d'hystérésis et oscillations . . . . .	83
3.2.2	Mesure de la masse de sable transportée . . . . .	86
3.3	Mesure des forces . . . . .	88
3.3.1	Spectre de fréquence des forces . . . . .	88
3.3.2	Influence de la vitesse . . . . .	89
3.3.3	Influence de l'angle d'attaque . . . . .	92
3.4	Loi de frottement effectif . . . . .	93
3.5	Énergie dissipée . . . . .	94
3.5.1	Conclusion des mesures de force en régime stationnaire . . . . .	95
3.6	Premier modèle . . . . .	96
3.6.1	Mise en équation . . . . .	96
3.6.2	Jerk equation . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Mesure de forces en régime oscillant</b>	<b>101</b>
4.1	Premiers essais . . . . .	102
4.2	Oscillations forcées . . . . .	104
4.2.1	Motivations . . . . .	104
4.2.2	Mises en œuvre expérimentale et numérique . . . . .	105
4.2.3	Oscillations sur un lit plat . . . . .	105
4.2.4	Intégration du PFD sur le premier tour . . . . .	107
4.2.5	Portance sur une route ondulée . . . . .	108
4.2.6	Remodelage de la piste . . . . .	110
4.2.7	Intégration des équations du mouvement . . . . .	112
4.2.8	Taux de croissance . . . . .	113
4.3	Conclusions et perspectives . . . . .	115

<b>III</b>	<b>VERS UNE MODÉLISATION RÉALISTE</b>	<b>117</b>
<b>1</b>	<b>Interactions entre véhicules</b>	<b>119</b>
1.1	Motivations . . . . .	120
1.2	Interaction entre deux patins . . . . .	121
1.2.1	Caractérisation des patins . . . . .	121
1.2.2	Patins côte à côte . . . . .	123
1.2.3	Patins de part et d'autre de la piste . . . . .	127
1.2.4	Modèle d'interaction ad hoc . . . . .	128
1.3	Interaction entre N patins . . . . .	129
1.3.1	Motifs observés . . . . .	129
1.3.2	Pulsation critique des patins . . . . .	131
1.3.3	Conclusion . . . . .	133
<b>2</b>	<b>Instabilité de tôle ondulée créée par une roue</b>	<b>135</b>
2.1	Présentation . . . . .	136
2.2	Modèle pour la roue . . . . .	136
2.3	Mesure de force . . . . .	137
2.3.1	État stationnaire . . . . .	138
2.3.2	Oscillations . . . . .	140
2.4	Rebonds . . . . .	143
2.5	Mécanisme de fixation de la longueur d'onde . . . . .	145
2.6	Déformation du lit granulaire . . . . .	146
2.7	Conclusions . . . . .	148
<b>3</b>	<b>Washboard sur un milieu granulaire humide</b>	<b>151</b>
3.1	Présentation . . . . .	152
3.2	Mesure de la cohésion . . . . .	154
3.3	Résultats . . . . .	157
3.3.1	Caractéristiques de la tôle ondulée . . . . .	157
3.4	Conclusions . . . . .	158
	<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b>	<b>160</b>
	<b>ANNEXES</b>	<b>164</b>
<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>167</b>
<b>B</b>	<b>Vidange d'un silo</b>	<b>169</b>
B.1	Introduction . . . . .	170
B.1.1	État de l'art . . . . .	170
B.1.2	Détails des simulations numériques . . . . .	172
B.2	Résultats . . . . .	174
B.2.1	Loi de Beverloo . . . . .	174
B.2.2	Bilan d'énergie . . . . .	178

B.2.3	Cartographie du silo . . . . .	179
B.2.4	Profil de vitesse et de densité à la sortie de la cuve . . . . .	182
B.2.5	Conclusions . . . . .	186
<b>C</b>	<b>Fluage d'une colonne de grains sous l'effet de variation de température</b>	<b>189</b>
C.1	État de l'art . . . . .	190
C.2	Simulations numériques du cyclage thermique . . . . .	196
C.2.1	Méthode numérique . . . . .	196
C.2.2	Régimes de compaction . . . . .	198
C.2.3	Compaction non-homogène . . . . .	203
C.2.4	Dynamique des grains . . . . .	206
C.2.5	Conclusion . . . . .	214

# Introduction générale



# Chapitre 0

## Milieux granulaires

On désigne sous le nom générique de *milieu granulaire* tout assemblage d'un grand nombre de particules solides en interaction. Les grains constituant un tel milieu peuvent être de taille et de nature très variées. On peut citer par exemple les grains de sable sur une plage d'une taille typique de  $100\ \mu\text{m}$ , un silo rempli de céréales (taille typique  $1\ \text{mm}$ ), les avalanches de roches où les blocs peuvent avoir une taille métrique. À une autre échelle, un astéroïde est également un milieu granulaire car c'est un amoncellement d'une multitude de petites roches maintenues en cohésion sous leur propre champ de gravité. L'étude des milieux granulaires suscite un vif intérêt depuis quelques décennies déjà (Guyon et Troadec [1994]; Pouliquen et al. [2011]). En effet, pour l'ingénieur il est primordial par exemple de bien dimensionner un silo à grains afin d'éviter que celui-ci ne cède, ou encore de savoir si une île artificielle faite de remblais pourra supporter les charges mécaniques qui lui seront appliquées. Pour le physicien, la compréhension d'un tel milieu représente un défi. Bien que la mécanique d'un grain isolé soit bien connue, leurs interactions (frottement solide, collisions inélastiques) sont complexes. De plus, un milieu granulaire contient un *grand nombre* de grains, par exemple une poignée de sable contient typiquement plus d'un million de grains. Il devient alors impossible de résoudre simultanément les équations de la mécanique pour tous les grains. Ainsi, il est alors délicat de relier la description d'ensemble d'un tel milieu aux lois régissant le comportement d'un grain. Ces mêmes comportements d'ensemble pouvant d'ailleurs présenter des propriétés très différentes selon la manière dont le matériau est excité (Jaeger et al. [1996]). En effet, un tas de sable garde sa forme comme un solide, pourtant le sable présent dans un sablier semble s'écouler comme un liquide et si l'on secoue suffisamment fort un bocal contenant sable, celui-ci va occuper tout l'espace disponible à l'instar d'un gaz. Un problème similaire est rencontré en thermodynamique, cependant les molécules d'un gaz par exemple sont soumises à l'agitation thermique ce qui permet à la physique statistique de faire le lien entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Un milieu granulaire est également soumis à l'agitation thermique, cependant celle-ci est extrêmement faible comparée à l'énergie nécessaire pour soulever un grain d'une hauteur égale à sa taille. Nous pouvons toutefois citer les travaux d'Edwards (Blumenfeld et Edwards [2003]; Blumenfeld et al. [2012]) qui cherchent à faire une description thermodynamique des milieux granulaires.

Comprendre les comportements statiques (empilement, compaction) et dynamiques (écoulement, avalanches, gaz granulaires) des milieux granulaires est donc toujours

un thème d'actualité. De plus, dans beaucoup de situations des instabilités peuvent apparaître au sein d'un tel milieu. Ces instabilités se manifestent par l'apparition de motifs, réguliers ou non, qui peuvent évoluer dans le temps et dont les propriétés dépendent faiblement des conditions initiales et des conditions aux limites. C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse dédiée à l'instabilité de tôle ondulée. Dans les pages qui suivent nous présentons différentes instabilités rencontrées dans un milieu granulaire.

## 0.1 Instabilités dans un milieu granulaire

Afin d'établir un rapide panorama nous avons classé les instabilités selon la méthode de sollicitation du système : vibrations, cisaillement ou action de la gravité.

### 0.1.1 Milieu granulaire vibré

#### Monocouche de grains monodisperses

Un des systèmes les plus simples dans lequel apparaît une instabilité consiste en une fine couche de grains vibrée verticalement. Le paramètre de contrôle de ce genre d'expériences est l'accélération réduite :  $\Gamma = 4\pi^2 f^2 A/g$  où  $A$  et  $f$  sont l'amplitude et la fréquence des vibrations et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Pour  $\Gamma > 2$ , une couche de grains couvrant moins de la totalité de la surface de la cellule les contenant se comporte comme un gaz quasi bidimensionnel dans lequel la densité est uniforme. Lorsque l'on *refroidit* ce gaz (i.e. lorsque l'on diminue  $\Gamma$ ) le système se sépare en deux phases. En effet, on voit apparaître une zone dense dans laquelle les grains sont quasiment immobiles entourée par un gaz de particules agitées (Olafsen et Urbach [1998]; Nie et al. [2000]). Ce type de transition, illustré sur la figure 1, possède des analogies avec la transition liquide/gaz classique, il est notamment possible de définir un analogue de la pression de vapeur saturante au sein du milieu granulaire. Une transition similaire apparaît également en l'absence de forçage. Dans un régime de refroidissement libre (*freely cooling*) d'un gaz de particules inélastiques, les particules rapides en collision avec les grains les plus lents ce qui provoque ici aussi l'apparition de zones quasi-immobiles (Goldhirsch et Zanetti [1993]).

#### Multicouche de grains monodisperses

Lorsque l'on augmente le nombre de grains présents dans la cellule et que celle-ci est recouverte de plusieurs couches de grains, de nombreux motifs peuvent apparaître. Les premières observations sont dues à Chladni et Faraday au XIX<sup>ème</sup> siècle qui ont remarqué qu'une fine couche de poudre déposée sur une membrane élastique excitée par un archet de violon se déforme. Les grains peuvent alors former plusieurs motifs selon les conditions d'excitation, ceux-ci sont représentés sur la figure 2. Contrairement à ce que l'on pourrait imaginer, les grains ne se placent pas dans les noeuds de vibrations de la plaque, mais au contraire se trouvent là où l'amplitude est maximale. En effet, ce phénomène est généré par l'air présent entre la plaque et les grains dont les mouvements convectifs poussent les grains dans les ventres de vibration. L'intérêt pour les milieux granulaires vibrés a connu un regain à partir des années 1980 avec l'apparition



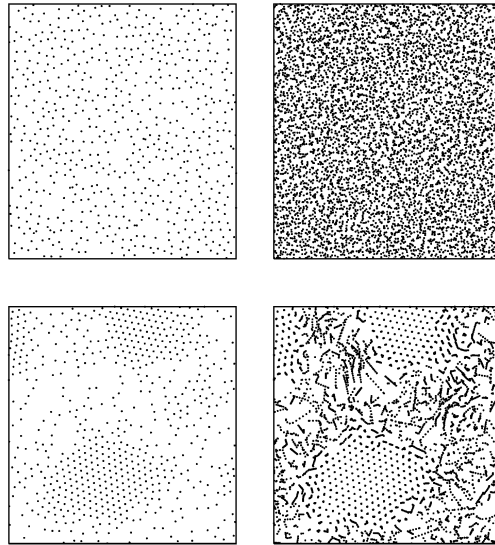


FIGURE 1 – **Vue de dessus d’une monocouche de grains vibrés.** Pour de faibles accélérations verticales on observe l’apparition de groupes de grains immobiles entourés de grains en mouvement rapide.

de nouvelles techniques expérimentales d’acquisition vidéo. Dans la plupart des expériences, une couche d’une dizaine de grains est vibrée avec précision. Selon la nature des grains (rigidité, rugosité etc.) et les caractéristiques des vibrations différents motifs sont observés. La figure 2 issue de Chladni [1809] et Jaeger et al. [2000] présente quelques exemples de ces motifs. Sous certaines conditions, les interactions non-linéaires entre les différents modes instables peuvent conduire à la formation de structures très localisées, comme c’est le cas sur la figure 3 extraite de Umbanhowar et al. [1996].

Dans un tel système de grains vibrés, si l’on augmente la fréquence d’oscillation tout en gardant une accélération constante, l’amplitude du mouvement vertical du réservoir devient plus faible que la taille d’un grain. Dans ce cas, le milieu granulaire se comporte comme un gaz en contact avec une paroi chaude. On observe alors dans certains cas une inversion de densité du milieu : une zone *froide* (i.e dans laquelle la vitesse des grains est faible) de forte densité se retrouve au dessus d’une zone *chaude* de faible densité (Lim [2010]). À l’instar d’un fluide newtonien, une instabilité de type Rayleigh-Bénard avec la formation de rouleaux de convection se développe au sein de ce système. Un exemple de cette instabilité est représenté sur la figure 4 issue de Eshuis et al. [2007].

### Multicouche de grains polydisperses

Les instabilités que l’on vient de présenter apparaissent au sein d’un milieu granulaire fait d’un seul et même type de grains. Lorsque que l’on mélange des grains dont les propriétés physiques (poids, taille, modules d’Young et de Poisson, forme... ) sont différentes on peut, de plus, observer de la ségrégation. L’exemple de ségrégation le plus courant s’observe dès le matin, au petit déjeuner. En effet, lorsque l’on entame un paquet de céréales, les plus grosses pépites se trouvent en haut du paquet, alors que lorsqu’on le termine, il ne reste en général que des miettes. Ce phénomène est connu sous

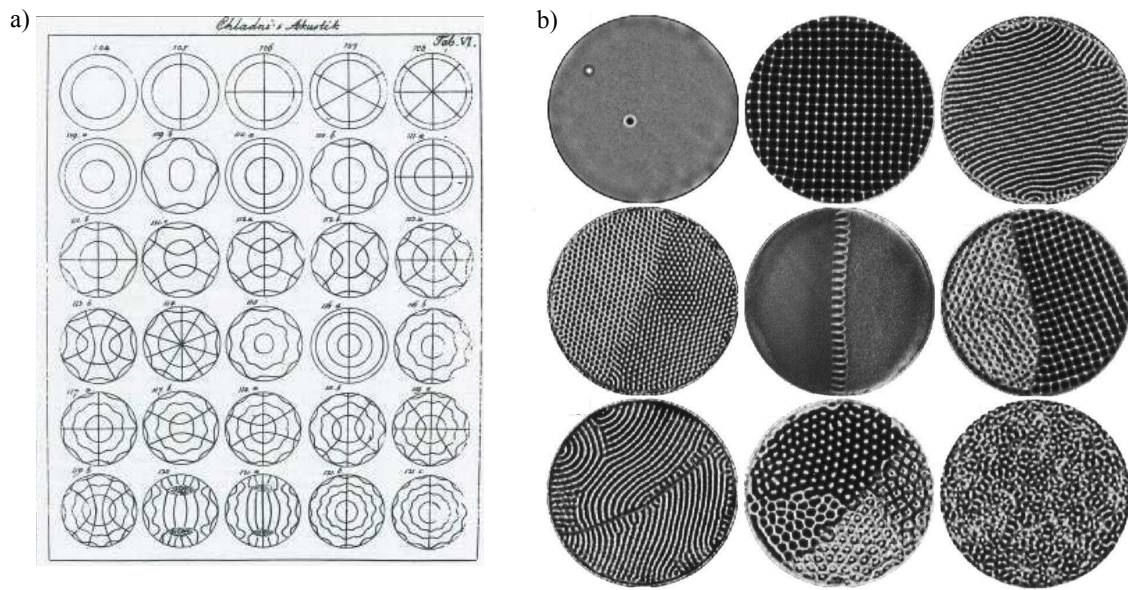


FIGURE 2 – a) Reproduction à la main des motifs observés par Chladni à la fin du **XIX**ième siècle. D'après Chladni [1809]. b) Différents motifs observés à la surface d'une multicouche de grains vibrés. D'après Jaeger et al. [2000].



FIGURE 3 – **Structure localisée** résultant à l'interaction non-linéaire des différents **modes instables**. D'après Umbanhowar et al. [1996].

le nom d'effet noix du Brésil (*Brazil nut effect* Naylor et al. [2003]; Breu et al. [2003]; Schnautz et al. [2005]; Rosato et al. [1987]). Sous certaines conditions (si le rapport entre le diamètre des grains est plus grand que l'inverse du rapport entre leur masse volumique) on peut également observer un effet noix du Brésil inverse au cours duquel les plus gros grains descendent dans l'empilement. Ces deux effets sont présentés sur la figure 5.

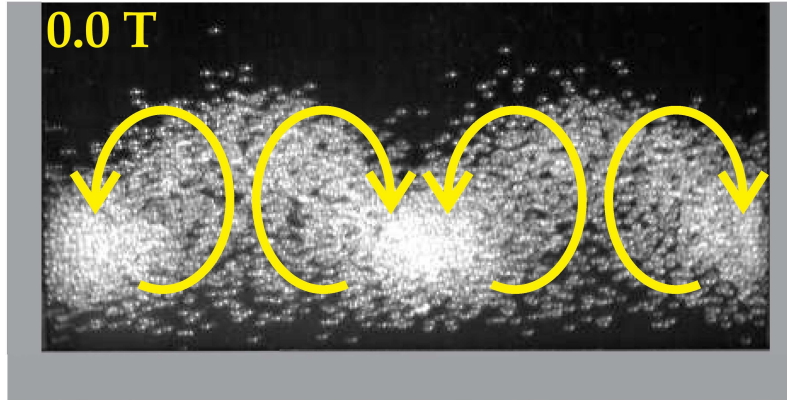


FIGURE 4 – **Rouleaux de convection similaires aux rouleaux de convection de Rayleigh-Bénard.** Dans les conditions de l'expérience (billes d'acier d'un millimètre de diamètre, huit couches de grains, accélération de  $64g$  à  $73\text{Hz}$ ) on observe quatre rouleaux de convection. D'après Eshuis et al. [2007].

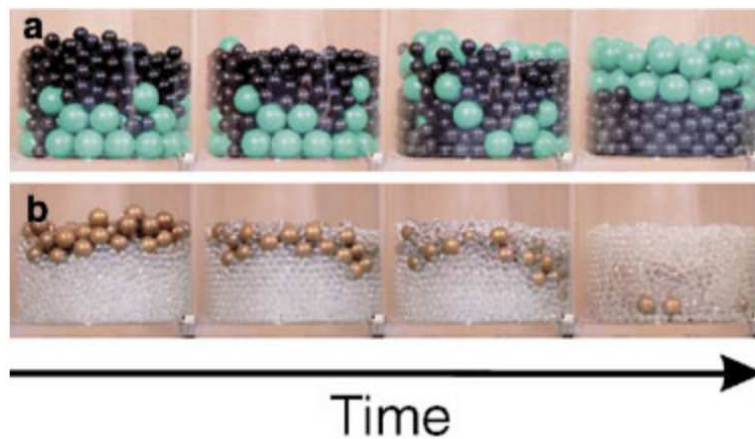


FIGURE 5 – **Illustration de l'effet noix du Brésil et de l'effet noix du Brésil inverse.** Sur la première ligne, les grosses particules (vertes claires) montent au-dessus des petites particules (noires). Dans la seconde ligne, les grosses particules sont cette fois-ci bien plus lourdes et tombent au fond de l'empilement. D'après Breu et al. [2003].

### 0.1.2 Grains en écoulement

#### Écoulements sur plan incliné

Une expérience aussi simple que faire s'écouler du sable le long d'un plan incliné peut faire apparaître plusieurs instabilités. L'exemple le plus courant d'écoulement gravitaire sont les avalanches. Lorsque que l'on incline une plaque recouverte de grains au-delà de l'angle de frottement dynamique, une simple perturbation suffit à générer une avalanche. La figure 6a) montre un dispositif expérimental servant à étudier la morphologie des avalanches ainsi créées (Daerr [2001]). Une plaque recouverte de velours sur laquelle est déposée une couche de grains d'épaisseur variable est progressivement inclinée avec précision. La surface du lit granulaire est ensuite éclairée à l'aide d'une

nappe laser en incidence oblique. Pour de faibles angles d'inclinaison de la plaque et une faible épaisseur de grains les avalanches ne s'étendent qu'en aval du lieu de perturbation (figure 6b)). Pour des épaisseurs et des angles plus importants (figure 6b)), l'avalanche se propage également en amont (les grains s'écoulant toujours vers le bas).

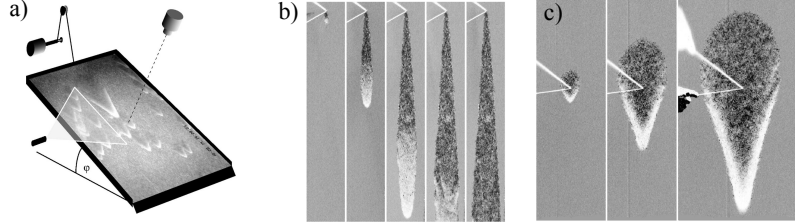


FIGURE 6 – a) **Dispositif expérimental utilisé afin d'étudier l'apparition et la forme des avalanches** en fonction de l'angle d'inclinaison du plan. b et c) **Deux avalanches typiques**, sur la sous-figure b) le plan est incliné de  $31^\circ$  et l'avalanche se propage uniquement en aval. Pour une inclinaison de  $34^\circ$  l'avalanche se propage également en amont. D'après Daerr [2001].

Certaines instabilités comme une digitation (Pouliquen et Vallance [1999]) ou encore l'apparition de vortex (Forterre et Pouliquen [2001]) peuvent également se développer au sein d'une avalanche. La figure 7 illustre ces deux instabilités.

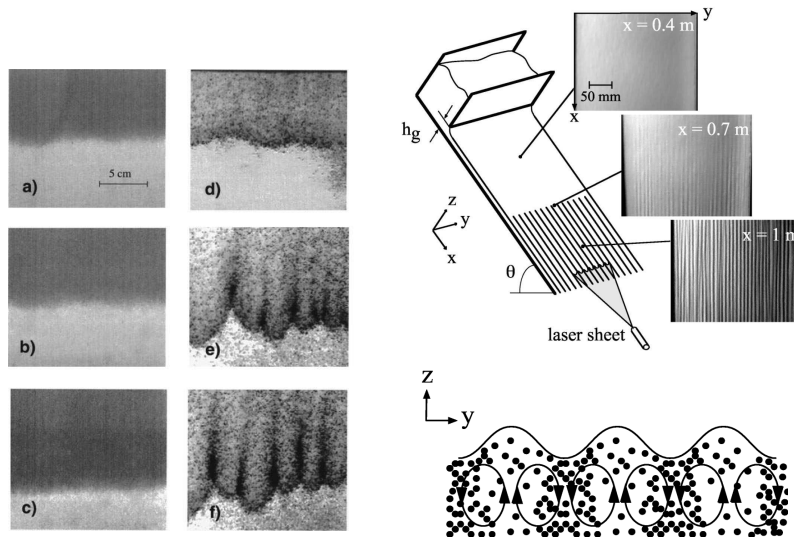


FIGURE 7 – À gauche, suivi du front d'une avalanche dans deux situations. Sur les sous-figures a, b et c) le milieu granulaire est mono-disperse et le front de l'avalanche est stable. Sur les sous-figures d, e et f) le milieu est bidisperse et on observe une digitation. D'après Pouliquen et Vallance [1999]. À droite, **dispositif expérimental et illustration des rouleaux de convection au sein d'une avalanche**. D'après Forterre et Pouliquen [2001].



### Tambours tournants

Un dispositif couramment utilisé pour reproduire des avalanches consiste en un tambour tournant partiellement rempli de grains. En effet, lorsque la surface libre des grains contenus dans le tambour est inclinée au delà de son angle de repos, une avalanche apparaît. Lorsque le tambour tourne suffisamment vite, l'écoulement de la surface libre devient continu. De tels systèmes sont très largement utilisés en industrie pour mélanger, recouvrir, sécher ou encore broyer des grains. Ces tambours sont souvent le siège de ségrégation, empêchant alors un mélange correct du milieu granulaire. Deux types de ségrégation peuvent avoir lieu dans un tel système : une ségrégation radiale et une ségrégation axiale. La première apparaît généralement assez vite, (i.e après quelques tours) et se manifeste par une accumulation de petits grains au centre du tambour, les gros grains étant rejetés à sa périphérie (voir figure 8a)). Pour de faibles vitesses de rotation, la zone circulaire formée des petits grains se déstabilise pour former un motif en pétales (figure 8b) issue de Gray et Chugunov [2006]). La ségrégation axiale apparaît dans des tambours dont la longueur est plus grande que le diamètre, elle se manifeste par une succession de bandes axiales de gros et petits grains. La figure 8c) issue de Richard et Taberlet [2008] montre un exemple de ségrégation axiale obtenue dans une simulation numérique de dynamique moléculaire de sphères molles.

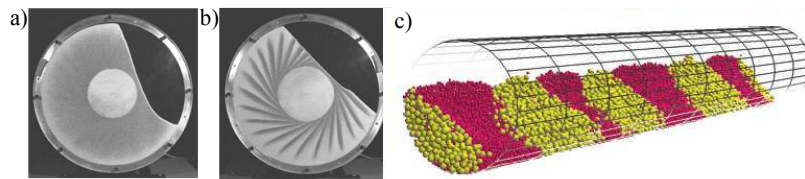


FIGURE 8 – a) Ségrégation radiale en tambour tournant. b) Formation de pétales en tambour tournant à très faible vitesse. D'après Gray et Chugunov [2006]. c) Ségrégation axiale en tambour tournant. D'après Richard et Taberlet [2008].

Une autre méthode de mise en mouvement de grains consiste à leur appliquer directement un cisaillement en déplaçant une des parois les contenant. Pour cela, on peut utiliser toutes les géométries rencontrées en rhéologie classique des fluides. Une des géométries couramment utilisée est celle de Couette. Elle consiste en deux cylindres coaxiaux dont l'un tourne par rapport à l'autre. Lorsque l'échantillon, placé entre ces deux cylindres, est un fluide classique, on observe à fort taux de cisaillement l'apparition de vortex. Cette instabilité, connue sous le nom d'instabilité de Taylor-Couette, apparaît également en présence d'un milieu granulaire fluidisé et polydispersé. La figure 9a) présente le dispositif expérimental utilisé par Conway et al. [2004] pour produire cette instabilité illustrée sur les figures 9b-c).

### Chute libre

Une expérience aussi simple que faire tomber un jet de grains en chute libre peut également faire apparaître une instabilité à l'instar d'un filet d'eau en chute libre. Lorsque chez soi on ouvre faiblement un robinet, on aperçoit un filet d'eau au niveau de la sortie qui se déstabilise pour former des gouttelettes en aval. Cette instabilité

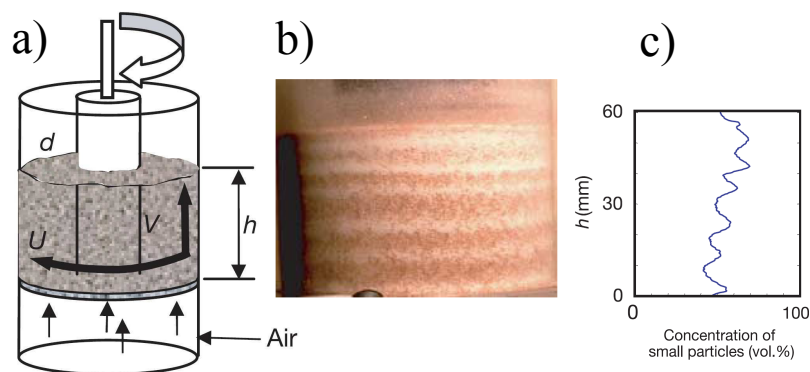


FIGURE 9 – a) Dispositif expérimental utilisé par Conway et al. [2004] pour observer une instabilité de type Taylor-Couette. Un milieu granulaire polydisperse et fluidisé est placé entre deux cylindres concentriques. b) Motif en bandes résultant de l'instabilité. c) Profil de concentration en petites particules en fonction de la hauteur, on remarque clairement une modulation régulière de cette concentration.

connue sous le nom de Rayleigh-Plateau est due à la tension superficielle de l'eau qui tend à minimiser la surface de contact entre le jet d'eau et l'air. Prado et al. [2011] ont montré que cette instabilité possède un analogue dans les milieux granulaires. Leurs travaux montrent que l'on peut définir une tension de surface effective pour un jet granulaire. Cette tension de surface résulte de l'interaction complexe entre les grains et l'air ambiant car cette instabilité disparaît sous vide d'air.

### 0.1.3 Rides et dunes



FIGURE 10 – Dunes de sable au sommet de laquelle des rides se développent. (Source : Google Image)

L'interaction entre un fluide et un milieu granulaire est responsable de nombreuses autres instabilités. Les plus communes sont les formations géologiques telles que les

dunes (voir figure 10), bancs de sable ou rides sous-marines ou éoliennes (Langlois [2005]; Andreotti et al. [2002a,b]; Hersen [2004]). Nous reviendrons plus en détail sur les mécanismes responsables de leur formation dans la partie 3. La formation de dunes n'est toutefois pas réservée à l'interaction entre les grains et un fluide en écoulement. En effet, sur les pistes en sable ou graviers, on observe sous certaines conditions l'apparition de rides. Ce phénomène que l'on appelle **tôle ondulée** ou « **washboard road** » fait l'objet de ce manuscrit.

## 0.2 Plan du manuscrit

Cette thèse est donc dédiée à l'étude de l'instabilité de tôle ondulée. Dans un premier temps nous présentons l'état des connaissances actuelles sur cette instabilité. Nous établissons ensuite un parallèle entre cette instabilité et d'autres phénomènes d'apparition spontanée de rides. Dans la seconde partie, après avoir présenté les outils expérimentaux et numériques d'étude, nous mettons en exergue les différentes caractéristiques de la tôle ondulée. Puis nous présentons un modèle de stabilité linéaire dans un cas simplifié où le véhicule est constitué d'une lame inclinée et libre de se déplacer verticalement. Ce modèle est fondé sur la mesure directe des forces agissant sur la lame. Dans la troisième et dernière partie nous réalisons différentes études afin d'obtenir une description plus réaliste de l'instabilité. Nous commençons par l'interaction entre différents véhicules, puis nous proposons un début d'interprétation de l'instabilité dans le cas où elle est créée par le passage d'une roue. Pour finir nous étudions l'effet de l'humidité et donc de la cohésion du lit granulaire sur l'apparition du motif.

Les annexes rapportent deux travaux numériques effectués en parallèle de l'étude de l'instabilité de tôle. Nous présentons tout d'abord des résultats sur la vidange d'un silo, puis sur l'effet des variations de température sur un empilement granulaire.





# Première partie

## CONTEXTE DE L'ÉTUDE



# Chapitre 1

## Présentation



FIGURE 1.1 – **Route en tôle ondulée aux abords de Frémont (USA)** . On observe un motif régulier de rides transverses à la route et qui s'étend sur toute la longueur de la piste. La distance entre deux rides est de l'ordre de la dizaine de centimètres et leur hauteur de l'ordre du centimètre. On imagine assez facilement que la conduite sur cette route est fort désagréable.

L'instabilité de tôle ondulée apparaît sur les routes en sable ou en terre soumises au passage répété de véhicules. La figure 1.1 présente un cas typique de route en tôle ondulée. On observe sur cette figure une succession de rides régulièrement espacées, à

l'image des anciennes planches à laver (*washboard*) que l'on utilisait jadis et servant maintenant d'instrument de musique country. Ce n'est qu'assez récemment que l'on a découvert que la formation de ces rides est due aux passages des voitures sur les pistes<sup>1</sup>. La hauteur des rides peut atteindre une vingtaine de centimètres et la longueur d'onde du motif peut être comprise entre 30 cm et 1 m. Cette longueur d'onde dépend de la vitesse des voitures, de leur masse, mais également de leurs caractéristiques mécaniques (amortisseurs, pression des pneus...) et encore des conditions climatiques. Les observations faites sur le terrain rapportent que le motif est plus marqué dans les virages, les pentes, et aux croisements, c'est-à-dire là où les véhicules exercent les plus fortes contraintes sur la route. Ces observations rapportent également que le motif peut se déplacer le long de la piste. Cette migration peut se faire dans le sens de la circulation ou bien dans le sens opposé.

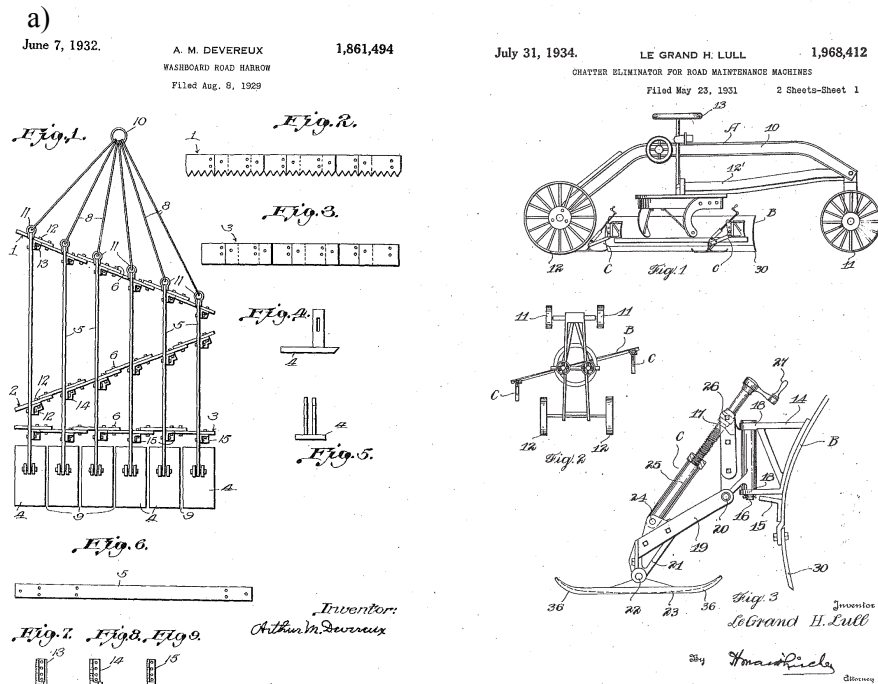
On imagine assez facilement que la conduite sur ce type de route est très gênante, et que les secousses peuvent endommager prématurément les véhicules. L'astuce pour moins ressentir les vibrations consiste à rouler suffisamment vite, généralement au-dessus de 60 km/h. Ce faisant, la voiture *flotte* sur les rides entraînant malheureusement une forte réduction de son adhérence, ce qui affecte le contrôle des trajectoires et les distances de freinage. Ainsi, rouler sur de la tôle ondulée est à la fois très désagréable et dangereux. Il est d'un grand enjeu que de chercher des moyens pour limiter son apparition. Actuellement, les seules options consistent à :

- goudronner ou cimenter les routes. Malheureusement cette solution reste très onéreuse lorsqu'il s'agit de traiter des milliers de kilomètres de piste.
- Répandre des additifs tels que des hydrocarbures sur les routes. Cette méthode, utilisée notamment au Canada, augmente la cohésion de la piste et la rend moins déformable. Cependant, cette solution pose de gros problèmes environnementaux.
- Lisser la piste. Ceci est la solution la plus couramment utilisée. Lors de ma thèse j'ai pu m'entretenir avec un chercheur américain m'expliquant que devant sa maison passe une route en tôle ondulée et que deux fois par été les services publics utilisent un bulldozer pour lisser la route. De même, un chercheur Paraguayen m'a également rapporté que la route qu'il empruntait pour faire le trajet entre son domicile et son laboratoire (sujette elle aussi à la tôle ondulée) est refaite toutes les deux ou trois semaines ! Bien que cette solution se montre efficace sur le court terme, dès que quelques voitures circulent à nouveau sur la piste celle-ci présente à nouveau le motif de tôle ondulée. Néanmoins, cette méthode reste utilisée depuis au moins quatre-vingts ans, comme l'atteste les deux brevets de la figure 1.2a) présentant des sortes de râpeaux destinés à éliminer la tôle ondulée. La figure 1.2b) est une photographie des engins que l'on utilise actuellement pour lisser les routes.

Si éviter la tôle ondulée est un grand challenge pour les ingénieurs, comprendre les mécanismes responsables de son apparition est également un défi pour les physiciens.

---

1. Dans le film de Henri Georges Clouzot *Le salaire de la peur* (1953), lorsque le camion chargé de nitroglycérine roule sur une route en tôle ondulée, il est dit, à tort, que c'est le vent qui crée les rides.



b)



FIGURE 1.2 – a) Brevets datant des années 30 portant sur des appareils destinés à **racler les routes en tôle ondulée**. Le brevet de gauche présente une sorte de râtelier destiné à lisser les routes. Il est formé de trois parties, la première est une lame en dents de scie qui vient gratter la surface de la route, ce grattoir laisse derrière lui une terre plus meuble qu'une lame lisse étend sur toute la largeur de la route, et finalement des patins viennent lisser et compacter cette terre. Bien que cette machine fonctionne parfaitement lorsqu'elle est tirée à faible vitesse sur une route, l'auteur du brevet reconnaît qu'à haute vitesse les lames se mettent à vibrer et dégradent encore plus l'état de la route. Le brevet de droite présente un autre moyen de lisser les routes, une lame inclinée vient racler la piste à altitude constante afin de supprimer les bosses. La nouveauté de ce brevet réside dans la technique d'attache de la lame sur le châssis du véhicule qui empêche toute vibration de cette dernière et supprime le phénomène de broutement que pouvait présenter la lame. b) **Engin actuellement utilisé pour lisser les routes en tôle ondulée.**



# Chapitre 2

## État de l'art

### Sommaire

2.1	Premières expériences . . . . .	28
2.2	Tentatives de modélisations . . . . .	28
2.3	Études préliminaires à la thèse . . . . .	32



## 2.1 Premières expériences

Bien que les premières observations du phénomène datent d'environ un siècle, les premières études expérimentales de l'instabilité de tôle ondulée sont dues à Keith Mather, de l'université de Melbourne (Mather [1963, 1962]). Il a reproduit une piste circulaire en sable (figure 2.1(a)) sur laquelle roule une roue poussée par un bras motorisé. Cette roue est reliée au bras par l'intermédiaire d'une suspension et est dotée d'un pneumatique en gomme dure. Grâce à ce système expérimental, Mather fut en mesure de reproduire l'instabilité. Il observa un motif de rides dont il étudia les propriétés. Il a ainsi pu mettre en évidence l'existence d'une vitesse seuil pour l'apparition des rides, en dessous de cette vitesse toute perturbation présente sur la piste est lissée, au dessus des rides apparaissent en quelques tours. Il a également mesuré la longueur d'onde du motif en fonction de la vitesse et la masse de la roue ainsi que l'influence de la raideur de la suspension.

La figure 2.1(b) montre la longueur d'onde du motif mesuré par Mather en fonction de la vitesse de la roue pour différentes situations. La courbe en noir est le cas standard, la courbe en gris est pour une roue plus lourde et la courbe en pointillé pour une suspension plus rigide. Il a également pu faire des relevés du profil de la piste grâce à un micromètre monté sur le bras. Ainsi, la figure 2.1(c) montre l'évolution du profil à partir d'une perturbation initiale. Sur ce schéma, la roue décolle au sommet des bosses et creuse un peu plus la piste à chaque impact. Nous verrons cependant dans le chapitre 2 de la troisième partie de cette thèse qu'il n'est pas nécessaire qu'il y ait impact entre la roue et la piste pour que l'instabilité se produise, et qu'elle commence à apparaître alors que la roue est toujours en contact avec la piste. Mather précise qu'il a aussi observé une migration du profil de la piste dans le sens rétrograde (inverse au sens de circulation de la roue). Il a enfin constaté que le phénomène était très robuste, en variant la raideur de la suspension, la masse de la roue, le mode de traction de la roue (poussée ou mise en rotation avec un couple moteur) et en utilisant des grains de tailles et formes très variables (sable, riz, sucre ou encore pois cassés). On peut noter toutefois que le lit de sable utilisé est assez mince et que la roue touche le support de l'expérience entre deux bosses.

## 2.2 Tentatives de modélisations

Quelques années après les premières investigations de Mather, Riley et Furry de l'université de Cornell aux États-Unis ont réalisé un montage très similaire à celui de Mather (Riley [1971]; Riley et Furry [1973]). Une roue suspendue via un amortisseur à un bras motorisé, est mise en mouvement sur un lit granulaire à vitesse constante. La roue est là aussi dotée d'un pneu dont la pression intérieure peut être réglée. Dans cette étude très complète, les auteurs ont fait varier : la masse de la roue, la raideur de la suspension, la pression des pneus, l'amplitude de la perturbation initiale, le milieu granulaire et également la hauteur du lit de grain. Riley et Furry ont alors retrouvé les résultats établis par Mather, c'est-à-dire que le phénomène est robuste, qu'il existe une vitesse seuil et que les rides se déplacent sur la piste. Ils ont également pu mettre en évidence qu'il n'était pas nécessaire de faire une perturbation initiale pour déclencher



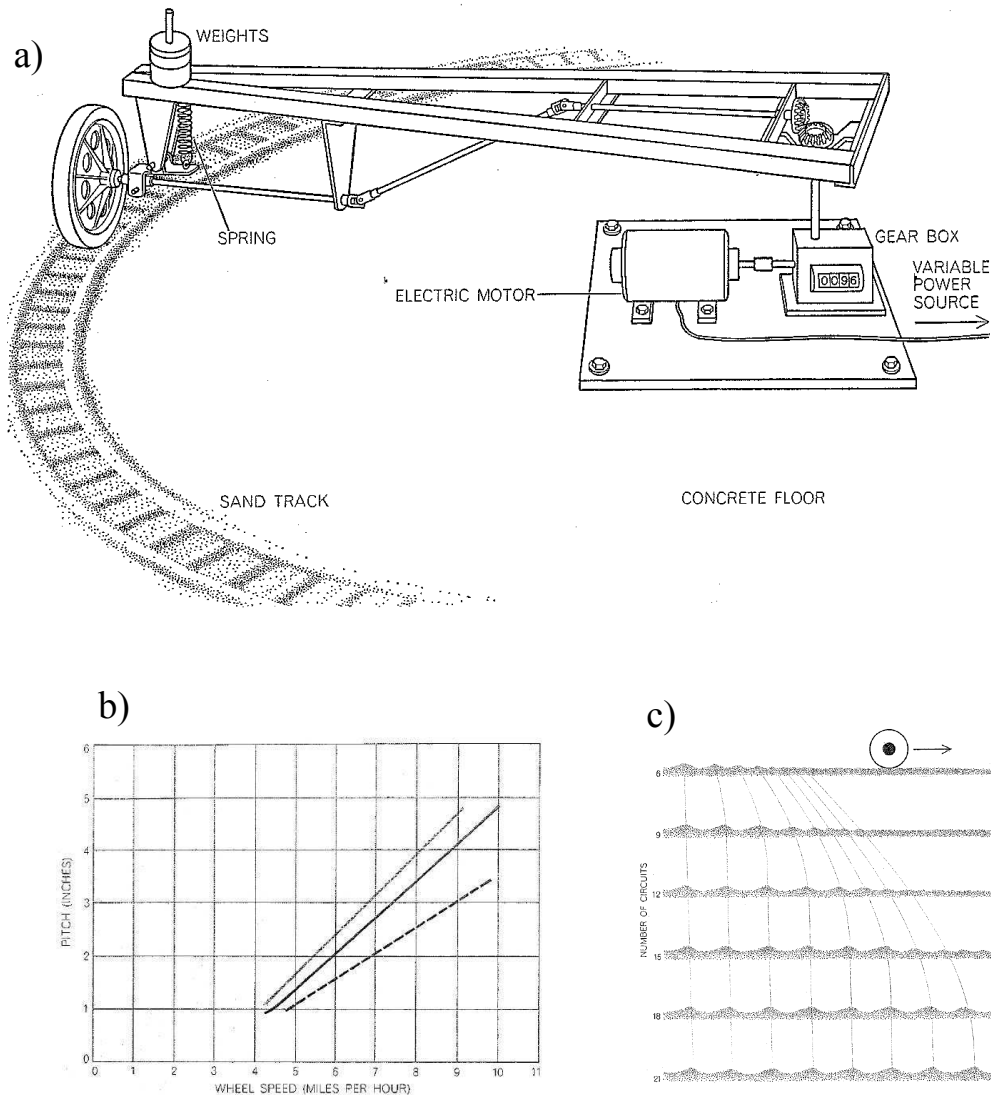


FIGURE 2.1 – a) Montage expérimental utilisé par Mather (Mather [1963]) pour étudier l'instabilité. La piste fait 5,10 m de périmètre et la roue peut être, au choix, poussée par le bras central ou bien soumise à un couple moteur. Celle-ci peut alors se déplacer jusqu'à  $4.5 \text{ m.s}^{-1}$ . b) Longueur d'onde du motif de tôle ondulée en fonction de la vitesse de la roue. La courbe en noir correspond au cas dit standard, la courbe en gris correspond à une roue plus lourde et la courbe en pointillé une suspension plus rigide. En prolongeant ces courbes, Mather en déduit la vitesse seuil de l'instabilité. c) Évolution spatio-temporelle du motif à partir d'une perturbation initiale localisée. D'après Mather [1963]

l'apparition des rides, mais que l'irrégularité naturelle de la piste était suffisante. De plus, ils ont observé une saturation de l'amplitude des rides et ils ont découvert que la longueur d'onde du motif n'était pas directement liée à la fréquence propre de la suspension (cette fréquence propre n'étant d'ailleurs pas toujours définie puisque les suspensions sont prévues pour être suramorties).

Outre les nombreuses expériences de tôle ondulée réalisées par Riley et Furry, ils ont également proposé le premier modèle physique convaincant pour cette instabilité et la

plupart des modèles plus récents s'inspirent directement de leurs travaux. La figure 2.2 présente la modélisation de l'interaction roue/route que font ces auteurs. Ils considèrent uniquement le mouvement de la roue. Cette simplification suppose que la dynamique du châssis rattaché à la roue via la suspension est négligeable. Cette roue est modélisée par une masse montée sur un ressort et un amortisseur en parallèle qui reposent sur la route. Celle-ci est modélisée par un système analogue de masse sur ressort et amortisseur. La *masse* de la route étant donnée par la largeur de la zone de contact entre le pneu et la piste. Riley et Furry obtiennent alors deux équations différentielles couplées en

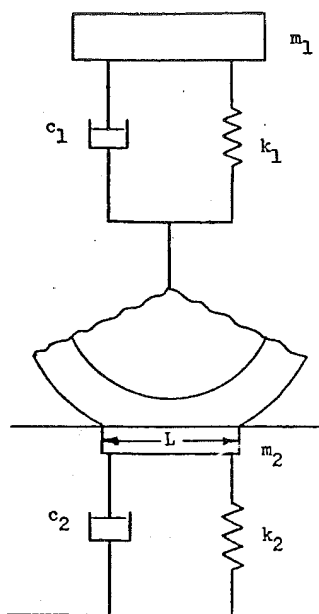


FIGURE 2.2 – **Modélisation de l'interaction roue/route faite par Riley.** La roue est modélisée par un système masse plus ressort avec une dissipation visqueuse, cette roue évolue sur une route qui elle aussi est modélisée par un système masse plus ressort. La masse de la route est donnée par l'épaisseur du lit de grains et la taille de sa zone de contact avec le pneu.

appliquant le principe fondamental de la dynamique aux deux masses. Puis, grâce à des tests de pénétration dans le sol, ils établissent une loi pour la déformation plastique de la route. De la même manière, tous les coefficients apparaissant dans la modélisation roue/route sont mesurés expérimentalement. Ils arrivent ainsi à un système complet qu'ils intègrent numériquement. Il faut souligner la qualité de ces travaux, tant au niveau des expériences réalisées que du modèle proposé et surtout de sa résolution numérique avec les moyens informatiques dont disposaient les auteurs en 1970.

Ce n'est que trente ans plus tard que la tôle ondulée refait son apparition en physique. En 2000, Mays et Faybishenko (Mays et Faybishenko [2000]) reprennent exactement le modèle de Riley, mais en proposant une loi de déformation du lit granulaire *ad hoc*, plutôt que la loi expérimentale trouvée par Riley. De plus, au lieu de faire une résolution par intégration numérique des équations, les auteurs implémentent un automate cellulaire. Ce modèle, certes produit des rides, mais dépend très fortement du choix arbitraire des coefficients de l'automate cellulaire. Les auteurs mesurent alors

une vitesse de dérive des rides (tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre), un taux d'accroissement d'entropie et des exposants de Lyapunov locaux.

L'année suivante, en 2001, Kurtze, Booth et Hong ont modélisé l'instabilité de tôle ondulée à partir du modèle de Riley, mais en cherchant une expression analytique des taux de croissance, longueurs d'onde, vitesse critique et vitesse de migration des rides. Pour cela, ils font la même modélisation de la roue que Riley mais utilisent une description lagrangienne du flux de voitures. Ils obtiennent alors l'équation dynamique suivante :

$$(\partial_t + V\partial_x)^2 Z + \Gamma\omega_0 (\partial_t + V\partial_x) (Z - H) + \omega_0^2 (\partial_t + V\partial_x) = 0, \quad (2.1)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation propre du système,  $\gamma$  est l'inverse du facteur de qualité,  $V$  la vitesse de la voiture,  $Z$  son altitude et  $H$  la hauteur de la piste. Les auteurs supposent ensuite que la déformation de la piste se fait proportionnellement à la force exercée par la roue sur celle-ci. Ils modélisent donc la compacité locale de la façon suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -Ma(H) (g + (\partial_t + V\partial_x) Z). \quad (2.2)$$

Le facteur de proportionnalité  $a(H)$  est l'inverse d'une compressibilité. Il décrit une piste qui se durcit au fur et à mesure que celle-ci se compacte ( $a$  est une fonction croissante). Puis, en faisant un développement perturbatif autour d'une hauteur  $H_0$ , les auteurs obtiennent une expression pour le taux de croissance des rides qui fait apparaître une transition entre deux régimes : un régime où la route reste lisse et un autre où la tôle ondulée est présente. La tôle ondulée se manifeste alors dès que la relation suivante est satisfaite :

$$\left. \frac{d \ln a}{dH} \right|_{H_0} < \frac{\omega_0^2}{\Gamma(2 - \gamma)}. \quad (2.3)$$

On observe que la transition entre les deux régimes est donnée par la forme de la fonction  $a$  et la valeur de la dissipation visqueuse. On remarquera d'une part que cette expression n'est pas valable lorsque la roue est suramortie, et que la vitesse de la roue n'y joue aucun rôle. Cependant les auteurs ne font pas de commentaire sur ce point.

Six mois plus tard, les mêmes auteurs rédigent un autre article dans lequel ils affinent un peu leur modèle. Ils gardent la même équation pour la dynamique de la roue, mais modifient l'expression de la compaction de la piste de la façon suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -Ma(H) (g + k(H - Z)) + D(H) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

Le premier changement notable dans cette équation est que la force totale subie par la route ( $M(\partial_t + V\partial_x)^2 Z$ ) est remplacée par le terme de rappel élastique uniquement, ce qui paraît déjà assez douteux. Mais plus étonnant encore, ils rajoutent un terme de diffusion de la route, expliquant que toutes les perturbations de la route sont lissées par ce processus qui peut être dû au vent, à la pluie ou encore au passage des voitures. Outre, le fait que ce terme n'a aucune justification physique, il est très surprenant de supposer que le passage des voitures a pour effet de diffuser les perturbations alors que

l'objectif de cette modélisation est justement de comprendre quel est l'effet du passage des voitures sur la route ! Quoi qu'il en soit, l'ajout de ce terme *ad hoc* permet de faire apparaître une vitesse seuil entre les deux régimes route lisse/route ondulée. De plus, à cause du terme de diffusion, les auteurs trouvent qu'il existe un flux de voiture critique, quelle que soit la vitesse des voitures, au dessus duquel la route est instable. Ceci est bien sûr faux, la route est soit stable soit instable et ce indépendamment du nombre de voitures circulant dessus. La croissance des rides se fera simplement plus rapidement si le trafic est intense.

En 2007 et 2009, Hoffmann et al. de l'université de Hambourg rédigent deux articles sur l'instabilité de tôle ondulée (Hoffmann et Misol [2007]; Hoffmann et al. [2009]). Ils reprennent le premier modèle de Kurtze et al., et le raffinent en considérant un trafic de voitures de différentes masses et différentes vitesses. Même s'ils partent d'un modèle fortement discutable, celui-ci sert finalement de prétexte aux auteurs pour illustrer une technique d'analyse de systèmes résonants.

Enfin, nous pouvons également citer les travaux récents de Balmforth, Hewitt et McElwaine (Hewitt et al. [2012]) inspirés par les discussions que nous avons eues avec McElwaine. Ces travaux traitent de l'instabilité de tôle ondulée non pas sur un lit granulaire mais sur un fluide complexe. Le phénomène est alors traité sous l'angle de la théorie de la lubrification viscoplastique, mais en oubliant que l'instabilité apparaît à cause du passage *répété* des voitures. En effet, ils ne considèrent que le premier passage du véhicule sur la piste, leur travaux sont donc en réalité plus proches des ricochets que de la tôle ondulée.

## 2.3 Études préliminaires à la thèse

Comme indiqué précédemment, l'instabilité de tôle ondulée est étudiée expérimentalement depuis les années 60 (Mather [1962, 1963]) et c'est dans l'optique de compléter ces études que Nicolas Taberlet a commencé à étudier la formation du motif créé par une roue tirée à vitesse constante sur un lit granulaire (Taberlet et al. [2007]; Bitbol et al. [2009]). Pour cela, il a utilisé deux montages expérimentaux (voir figure 2.3), l'un situé au laboratoire du DAMTP à Cambridge (UK) et l'autre au laboratoire de physique de l'ENS de Lyon. Le premier, consiste en une table tournante sur laquelle repose un lit de sable alors que le deuxième ressemble beaucoup plus à l'expérience Mather, avec une piste circulaire au centre de laquelle un axe en rotation permet d'entraîner une roue. Dans les deux expériences la roue est fixée à un bras articulé autour d'une liaison pivot, aucune suspension n'est attachée à la roue. Elle est donc soumise uniquement à son poids et à la réaction du lit de sable. Un capteur d'angle magnétique permet de mesurer l'angle que fait le bras soutenant la roue avec l'horizontale, ce qui permet d'obtenir l'altitude de la roue. Ces expériences sont également complétées par des simulations numériques de dynamique moléculaire de sphères molles à deux dimensions. De plus amples détails seront donnés sur les simulations et les expériences dans la partie 1 de cette thèse.

Les travaux réalisés avant ma thèse (Taberlet et al. [2007]; Bitbol et al. [2009]) confirment le fait que l'instabilité de tôle ondulée n'est pas due à la présence de suspension sur les véhicules et qu'elle ne résulte pas d'une résonance interne à la voiture.



FIGURE 2.3 – **Photographies des deux montages expérimentaux.** À gauche, l'expérience réalisée à Cambridge, une table tournante sur laquelle est déposée une couche de grains est mise en rotation. L'avantage de ce dispositif est que la roue n'est pas en rotation autour de la piste et donc il est facile de l'instrumenter. Cependant, à cause de la force centrifuge, les grains sont éjectés vers le bord extérieur de la table tournante et le lit de sable n'est pas horizontal. À droite, l'expérience réalisée à Lyon. Ici, la piste est fixe et c'est la roue qui se déplace, il est donc plus compliqué de l'instrumenter. Par contre, la piste n'est pas soumise à la force centrifuge et est deux fois plus longue qu'à Cambridge.

Bien que la roue soit fixée à l'extrémité d'un bras, formant ainsi un pendule, l'inclinaison du bras est proche de l'horizontale. Ainsi pour de faibles amplitudes d'oscillation la fréquence propre du pendule ne joue aucun rôle. De plus, les simulations montrent qu'aucune compaction ou ségrégation n'interviennent durant l'apparition du motif et que l'instabilité peut être traitée par un modèle 2D sans aucune cohésion entre les grains. Autre fait important, la taille et la forme des grains ne jouent aucun rôle dans le phénomène de tôle ondulée. Ceci signifie que le milieu granulaire peut, ici, être considéré comme un milieu continu. Une autre découverte importante faite avant ma thèse est que l'instabilité n'apparaît pas uniquement dans le cas d'une roue qui roule. Mather avait déjà montré que la roue pouvait être motrice ou passive, mais dans l'article de Bitbol et al. [2009] les auteurs montrent que la roue peut être bloquée ou même remplacée par une simple lame inclinée. L'instabilité présente alors les mêmes caractéristiques que dans le cas d'une roue : existence d'une vitesse critique, croissance exponentielle des rides, migration du motif, etc. Elle possède également un avantage technique, en effet c'est un système plus simple à traiter car elle supprime le degré de liberté associé à la rotation de la roue, et seule sa masse, sa largeur et son inclinaison servent à la caractériser. Un travail important sur la vitesse seuil de l'instabilité a également été mené. En identifiant les grandeurs importantes du problème, à savoir, la vitesse  $v$ , la masse de la roue  $m$ , la masse volumique de la piste  $\rho$ , et la largeur de la plaque  $w$ , il est possible de construire un nombre sans dimension  $Fr$ , appelé nombre de Froude et défini par :

$$Fr = \frac{v^2}{g} \sqrt{\frac{\rho w}{m}}, \quad (2.5)$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Il apparaît alors que l'instabilité se produit à

nombre de Froude constant. Ceci permet donc d'obtenir une loi d'échelle pour la vitesse critique  $v_c$  :  $v_c \sim \sqrt{g \sqrt{\frac{m}{\rho w}}}$ . Une loi d'échelle similaire est également obtenue pour une roue, ce qui a permis aux auteurs d'extrapoler leurs mesures au cas de voitures, ils trouvent que la vitesse critique se situe vers 5-10 km/h. Bien que ces deux articles (Taberlet et al. [2007]; Bitbol et al. [2009]) soient très complets quant à la description du phénomène, ils ne fournissent pas de renseignement concernant le mécanisme responsable de la formation de la tôle ondulée. Ces travaux préliminaires mettent toutefois en lumière toutes les propriétés de l'instabilité de tôle ondulée et que tout modèle se doit de reproduire :

- L'instabilité est due au passage *répété* du véhicule sur la piste.
- Il existe une vitesse critique séparant deux régimes : route lisse / route ondulée.
- Cette vitesse critique dépend de la masse et de la largeur du véhicule.
- Les rides se déplacent sur la piste, elles avancent dans le sens de la circulation avec une roue et avancent ou reculent avec une plaque, selon la vitesse de celle-ci.
- En utilisant une plaque et lorsque la vitesse est proche du seuil, les rides ont une longueur d'onde bien définie et ne subissent pas de mûrissement.
- La taille des grains n'intervient pas et donc le milieu granulaire peut être considéré comme un milieu continu.
- Le problème peut être ramené à deux dimensions.

Finalement, la bibliographie portant sur la tôle ondulée est assez maigre, on ne compte qu'une petite dizaine d'articles. Cependant, il existe plusieurs phénomènes possédant de fortes analogies avec cette instabilité et sur lesquels de nombreux travaux ont été réalisés. Les paragraphes suivants présentent quelques exemples de phénomènes similaires.

# Chapitre 3

## Phénomènes similaires

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Usure ondulatoire des rails . . . . .</b>	<b>36</b>
3.1.1	Description . . . . .	36
3.1.2	Origine de l'usure ondulatoire . . . . .	36
3.1.3	Traitement . . . . .	38
<b>3.2</b>	<b>Dunes et rides de sable . . . . .</b>	<b>39</b>
3.2.1	Description . . . . .	39
3.2.2	Intérêt . . . . .	40
<b>3.3</b>	<b>Broutement . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>3.4</b>	<b>Formation des bosses en ski . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>3.5</b>	<b>Autres phénomènes de formation de rides . . . . .</b>	<b>44</b>
3.5.1	Rouleau d'impression . . . . .	44
3.5.2	Motifs laissés par une pointe d'AFM . . . . .	45
3.5.3	Disques durs . . . . .	45
3.5.4	Ricochets . . . . .	47
<b>3.6</b>	<b>Synthèse . . . . .</b>	<b>47</b>

---



## 3.1 Usure ondulatoire des rails

### 3.1.1 Description

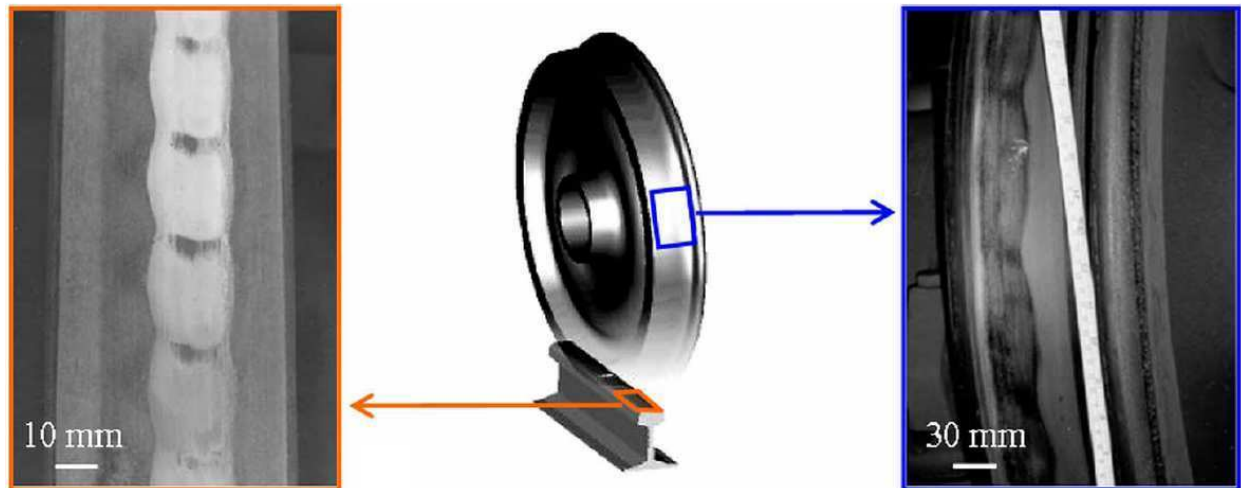


FIGURE 3.1 – **Roue et rail déformés par usure ondulatoire.** À gauche, photographie d'un rail de train sur lequel on aperçoit le motif créé par l'usure ondulatoire, à droite, photographie de la roue usée par le rail déformé. D'après (Saulot [2006]).

L'usure ondulatoire des rails (*roaring rails* ou *rail corrugation*) est un phénomène d'apparition de rides à la surface des rails de trains, tramways ou métros (voir figure 3.1) et qui peut se répercuter également sur les roues. L'usure ondulatoire déforme les rails et les roues, elle présente les mêmes problèmes que la tôle ondulée : elle coûte chère (le remplacement ou rabotage des rails uniquement dû à l'usure ondulatoire coûte chaque année en Europe 60 millions d'euros (de Bock [2006])), c'est également une source de nuisances sonores (un métro roulant sur un rail ondulé peut générer un son 10 dB plus élevé que sur un rail lisse). Pour finir elle représente un grave problème de sécurité à cause des vibrations engendrées et de la perte d'adhérence induite. De plus, ce phénomène touche environ 40% des rails. Ceci explique sûrement pourquoi la littérature sur ce sujet est beaucoup plus foisonnante que sur la tôle ondulée. En effet, une revue de 2002 (Sato et al. [2002]) recense plus de 1500 articles traitant du problème.

### 3.1.2 Origine de l'usure ondulatoire

L'usure ondulatoire des rails provient du couplage entre la dynamique du véhicule et du rail d'une part, et la façon dont se déforme le rail d'autre part. Cette déformation peut être soit de l'usure à proprement parler, c'est-à-dire qu'il y a abrasion du rail et perte de matière, soit une déformation plastique du matériau dont est fait le rail. La dynamique du véhicule et du rail est souvent appelée dans la littérature « mécanisme de fixation de la longueur d'onde ». En effet, c'est cette dynamique qui va imposer la période du motif à cause des différentes fréquences propres au système. Celui-ci compte de nombreux degrés de liberté qu'une étude approfondie se doit de rendre compte :



- les mouvements horizontaux et verticaux des roues
- le mouvement du bogie (le chariot reposant sur les roues et sur lequel sont attachés les wagons)
- le mouvement du wagon (suspendu par des amortisseurs sur le bogie)
- les modes de torsions et flexions des essieux
- les modes de vibration des rails des traverses
- le mouvement du ballast

Ces différents mécanismes ont conduit à une classification des motifs d'usure ondulatoire selon la résonance prépondérante qui fixe la longueur d'onde. La figure 3.2 issue de Grassie et Kalousek [1998] résume les cinq mécanismes différents responsables de l'usure ondulatoire.

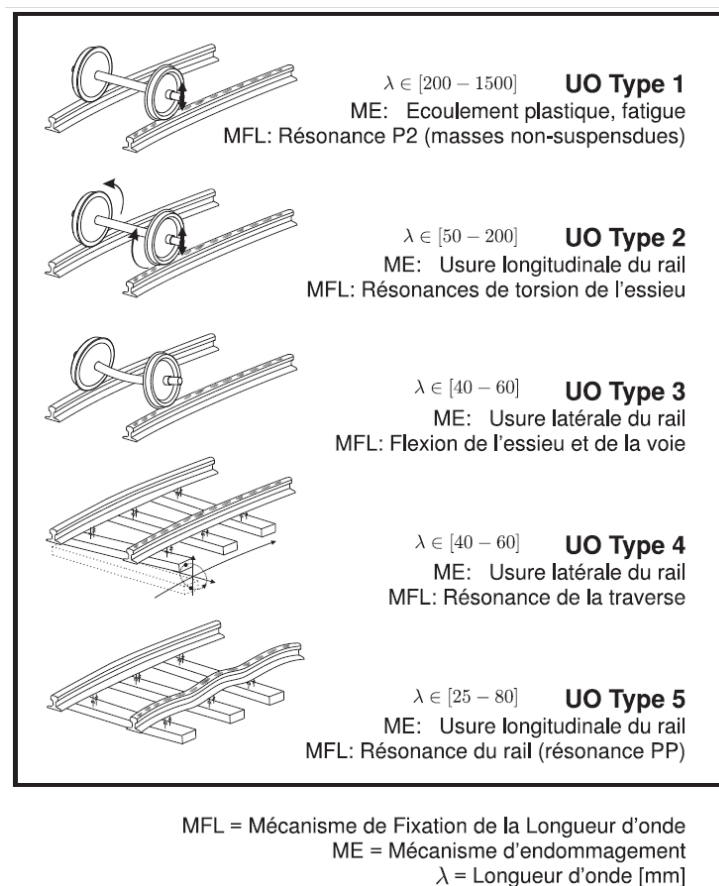


FIGURE 3.2 – .Classification des différents mécanismes responsables de l'usure ondulatoire des rails avec les longueurs d'onde correspondantes et les origines de l'instabilité. ME : mécanisme d'endommagement. MFL : mécanisme de fixation de la longueur d'onde. D'après (Grassie et Kalousek [1998])

Le premier type d'usure ondulatoire est dû à une résonance de ce qui est appelé *les masses non suspendues*, c'est-à-dire, l'essieu, les roues, les disques de frein et la boîte de réduction, cette résonance est appelée P2. La suspension d'un wagon étant faite de sorte que la cabine transportant les passagers soit suramortie, il est possible que les masses non suspendues quant à elles, aient une fréquence propre. Pour le deuxième type d'usure ondulatoire, c'est la vibration de torsion de l'essieu qui est responsable de

l'endommagement du rail. Dans les courbes la différence de longueur des rails excite le premier mode de torsion et dans les zones d'accélération et de freinage le couple appliqué à l'essieu excite le deuxième mode de torsion (Grassie et Elkins [1993]). L'usure de type 3 est provoquée par la vibration de flexion de l'essieu et de la voie. Dans les courbes, la voie impose un effort important sur l'essieu ce qui peut exciter un ou plusieurs modes de flexion. Le quatrième type d'usure ondulatoire correspond à une résonance de la traverse, et finalement l'usure de type 5 est provoquée par une résonance du rail entre ses points de fixations aux traverses, d'où son nom PP pour pinned-pinned mode (Hempelmann et Knothe [1996a,b]).

### 3.1.3 Traitement

A l'instar de la tôle ondulée, le seul traitement contre l'usure ondulatoire des rails consiste à raboter voire remplacer le rail (Ahlbeck et Daniels [1991]; Grassie et Elkins [1993]; Collette et al. [2008]; Collette et Preumont [2009]). Là aussi, cette solution est très onéreuse et temporaire. D'autres méthodes sont également proposées, mais bien souvent celles-ci ne traitent qu'un seul mécanisme d'usure ondulatoire et peuvent malheureusement en accentuer un autre. Nous pouvons tout de même citer quelques moyens de traitement. Le premier consiste à meuler les rails pour les rendre les plus lisses possible ce qui aura pour effet de retarder l'apparition du motif (Grassie [1996]). Afin de réduire l'usure de type 2 ou 3, dues aux torsion et flexion de la roue, il est possible de meuler de manière asymétrique les rails dans les courbes (Matsumoto et al. [2002]). Ceci permet de réduire les efforts sur l'essieu qui sont la cause de ces types d'usure. Il est également possible de graisser les roues (Ahlbeck et Daniels [1991]) ou les rails (Tomeoka et al. [2002]; Matsumoto et al. [2002]; Suda et al. [2002]). Ceci a pour effet de diminuer les efforts de traction sur l'essieu et de ralentir la croissance du motif. Un graissage des rails pose cependant des problèmes quant au freinage du train et aussi peut avoir des conséquences dommageables pour l'écologie. L'ajout d'un lubrifiant permet également de diminuer l'usure ondulatoire. En effet en diminuant la friction entre la roue et le rail on diminue également les efforts d'abrasion détériorant le rail. Ceci peut être obtenu avec des lubrifiants de type HPF (High Positive Friction) (Eadie et al. [2002]). Le lubrifiant HPF peut se trouver sous forme solide ou liquide. Une autre solution mise en place et qui est assez efficace consiste en l'utilisation d'aciers plus durs qui résistent à l'abrasion. Enfin, l'emploi d'absorbeurs dynamiques de vibrations permet de réduire les effets des modes de torsion de l'essieu et du rail (Collette et al. [2008]). Ainsi, l'usure ondulatoire des rails suscite un très vif intérêt, très certainement plus important que la tôle ondulée. Du fait des nombreuses similitudes entre les phénomènes et de l'abondante littérature, elle constitue un bon point de départ pour modéliser et étudier la tôle ondulée. La seule grande différence entre ces deux instabilités réside dans le support qui est déformé. Dans un cas il s'agit d'un métal, dans l'autre d'un milieu granulaire. À l'inverse la formation des dunes de sable fait intervenir le même support que la tôle ondulée. Même si la formation de ces dunes n'est pas due à un véhicule mais à l'écoulement d'un fluide, il est également intéressant de considérer ses analogies avec la tôle ondulée.

## 3.2 Dunes et rides de sable

### 3.2.1 Description

Dans la nature, les milieux granulaires sont souvent soumis à l'écoulement d'un fluide. On peut penser au vent qui balaye les plages, aux vagues, aux courants marins ou fluviaux. L'écoulement du fluide dépend naturellement du profil du milieu granulaire. Dans de nombreux cas, si sa vitesse est suffisamment grande, c'est-à-dire si la contrainte de cisaillement qu'il applique sur les grains dépasse un seuil, les grains peuvent être arrachés au milieu et transportés. Ainsi, le profil du lit granulaire évolue. Cette interaction entre un fluide et un milieu granulaire est responsable de nombreuses formations géologiques (dunes de sable, rides, bancs de sable...) qui ont été classifiées (Langlois [2005]).



FIGURE 3.3 – Différents types de dunes éoliennes. De gauche à droite et de haut en bas : barkhane (Mauritanie), dunes paraboliques (Nouveau-Mexique), dunes longitudinales (désert du Namib), dunes transverses (Mexique) et dunes étoiles vues du ciel (Namib) et du sol (Maroc). D'après Langlois [2005].

De manière générale, on fait la distinction entre les *petites* structures (quelques centimètres) appelées rides et les *grandes* structures (jusqu'à plusieurs centaines de mètres) appelées dunes.

Les rides sont dues à un écoulement d'eau (on les appelle alors rides sous-marines) ou d'air (rides éoliennes). Les rides sous-marines peuvent être générées par des écoulements oscillants comme les vagues au bord d'une plage mais également par un écoulement continu. On en trouve par exemple sur les lits de certaines rivières avec des fonds sablonneux ou encore dans les baies soumises à de fortes marées. Leur taille typique est de quelques centimètres et leur longueur d'onde est d'une dizaine de centimètres. Les rides éoliennes, ont également les mêmes tailles caractéristiques et on les rencontre sur les plages, le sommet des dunes ou encore dans les étendues de cendres volcaniques. Il existe également ce que l'on appelle des mégarides, d'une taille de l'ordre du mètre qui apparaissent dans des milieux granulaires bidisperses. Les dunes peuvent elles aussi exister dans l'air comme dans l'eau. Elles ont des morphologies dépendant du sens, de la direction et de l'intensité de l'écoulement, mais également de sa régularité. Leur taille dépend aussi de la quantité de sable disponible et peut aller de quelques mètres à plusieurs centaines de mètres, de plus certains champs de dunes peuvent couvrir plusieurs milliers de kilomètres carrés. Parmi la zoologie des dunes on trouve : les barkhanes (en forme de croissant), les dômes, les dunes linéaires, paraboliques ou en étoile. Les dunes sous-marines sont observées sur les lits des rivières ou des fleuves avec un fond sablonneux mais également en mer. La figure 3.4 montre deux relevés topographiques, l'un du Rhin et l'autre de la Manche. Sur le premier on aperçoit très clairement des rides d'une taille d'un mètre et d'une longueur d'onde d'une dizaine de mètres et s'étendant sur plusieurs kilomètres. Le second relevé montre l'existence de dunes sur les bancs de sable immergés sous la Manche.

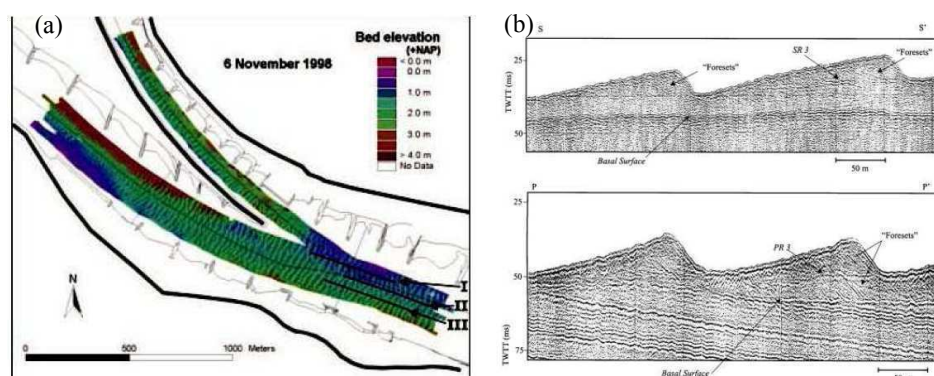


FIGURE 3.4 – (a) Relevé topographique du fond du Rhin au Pays-Bas, d'après (Wilbers et Brinke, 2003). (b) Relevé du relief sur un banc de sable en Manche, d'après (Bastos et al., 2003)

### 3.2.2 Intérêt

Au-delà d'être un terrain de jeu pour les coureurs du Paris-Dakar et les amateurs de ski sur sable, les dunes de sable peuvent avoir des conséquences dramatiques à cause de leur migration. En effet, dans de nombreux pays (les pays du Sahara, la



Chine, le Brésil, ou même en France avec la dune du Pyla), cette migration met en danger les infrastructures, les habitations ou encore les terres cultivées qui peuvent se retrouver ensevelies sous plusieurs mètres cubes de sable (la dune du Pyla contient soixante millions de mètres cubes de sable). Les bancs de sable sous-marins et leurs mouvements sont eux constamment surveillés car ils menacent directement le transport fluvial et maritime et peuvent endommager les câbles et pipelines reposant sous l'eau.

En marge de ces considérations matérielles et économiques, la formation de dunes est un problème de physique captivant qui aujourd'hui n'est pas entièrement résolu. De nombreuses études se sont attaquées à la formation des dunes, qu'elles soient expérimentales (Andreotti et al. [2002a]; Rousseaux et al. [2004]; Hersen [2004]; Loiseleux et al. [2005]; Langlois et Valance [2005b]), numériques (Nishimori et al. [1998]; Herrmann et al. [2005]) ou analytiques (Blondeaux [1990]; Valance et Rioual [1999]; Roos et Blondeaux [2001]; Andreotti et al. [2002b]; Charru et Mouilleron-Arnould [2002]; Langlois [2005]; Langlois et Valance [2005a]). Sous de nombreux aspects, la formation de dunes de sable est similaire à celle de la tôle ondulée. Tout d'abord, pour ces deux instabilités le matériau se déformant est le sable. Les motifs obtenus sont également semblables : ils apparaissent au-delà d'une certaine vitesse (de l'écoulement ou de la voiture), et croissent exponentiellement dans le temps jusqu'à atteindre une amplitude maximale et une longueur d'onde bien définie. De plus, dans les deux cas les motifs subissent une migration (principalement dans le sens de l'écoulement pour les rides et dans les deux sens pour la tôle ondulée). Pour finir, ces deux instabilités naissent du couplage entre deux mécanismes, l'un étant la dynamique du fluide ou de la voiture et l'autre étant l'érosion et la déposition du sable. En effet, pour les dunes de sable l'écoulement suit la morphologie du terrain tout en transportant des grains. Pour la tôle ondulée, c'est la voiture qui suit le profil de la piste tout en déformant celle-ci pendant son passage. Toutefois les mécanismes de transport des grains et les équations régissant les dynamiques du fluide et de la voiture sont très différents et il est possible que les analogies s'arrêtent juste aux considérations phénoménologiques mentionnés ci-dessus.

### 3.3 Broutement

Un autre type d'instabilité similaire à la tôle ondulée se retrouve en mécanique lors de l'usinage de pièces. Sous certaines conditions des vibrations auto-entretenues apparaissent dans la machine outil, créant alors un motif régulier à la surface de la pièce usinée. Cette instabilité, nommée broutement, est très néfaste pour l'état de surface de la pièce. En plus du bruit généré, cette instabilité cause des dommages sur les machines outils (qu'il s'agisse d'une perceuse, d'un tour, ou encore d'une fraiseuse) à cause des vibrations et également sur les outils de coupe. La figure 3.5 présente différents états de surface causés par le broutement.

Du fait de ses applications industrielles évidentes, ce phénomène a été beaucoup étudié afin d'en connaître les causes et de pouvoir prévenir son apparition (Chiou et al. [1995]; Yang et al. [2003, 2010]; Al-Regib et al. [2003]; Zatarain et al. [2006]; Li et Shin [2007]; Quintana et Ciurana [2011]; Siddhpura et Paurobally [2012]). Ainsi, il a été montré qu'il était possible de limiter le broutement en modifiant la géométrie des outils et porte-outils, mais également, tout comme pour l'instabilité de tôle ondulée, en rédui-

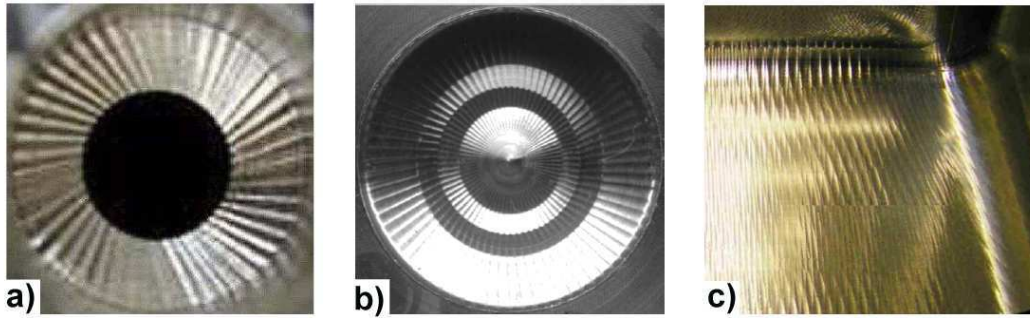


FIGURE 3.5 – **État de surface laissé par le broutement** lors du perçage (a et b) et lors du fraisage (c) de pièces métalliques, on voit très nettement un motif régulier laissant un état de surface très médiocre.

sant la vitesse relative entre l'outil et la pièce (le broutement dépend également très fortement de cette vitesse). Les mécanismes responsables de cette instabilité sont semblables à ceux de l'usure des rails : le broutement est dû aux diverses résonances et fréquences propres de la machine outil. Ainsi, les modélisations de cette instabilité (Chiou et al. [1995]; Zatarain et al. [2006]) reposent sur l'étude des divers oscillateurs couplés présents au sein de la machine outil. La figure 3.6 illustre quelques modélisations de machines outil.

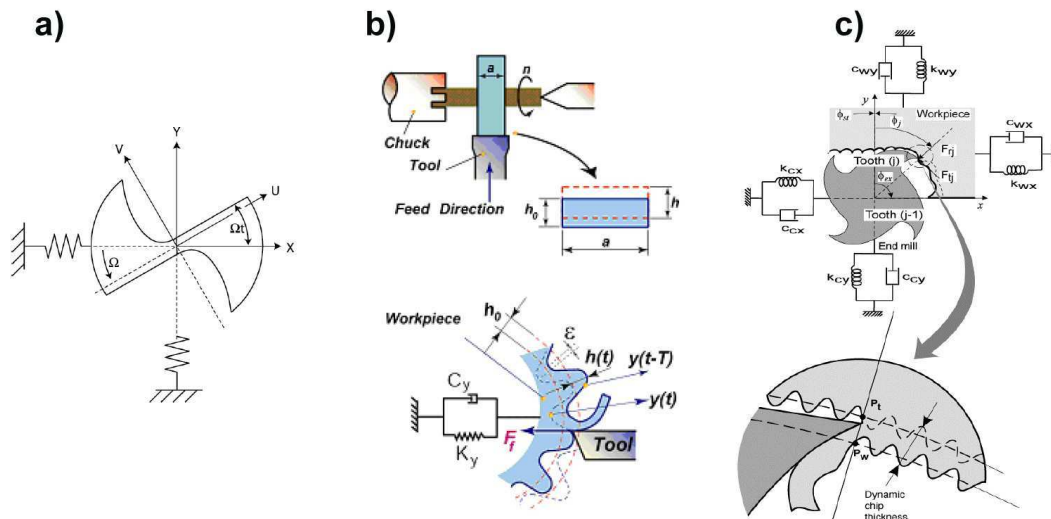


FIGURE 3.6 – **Illustration des modélisation visco-élastiques des matériaux et outils de coupe** (a) foret, (b) tour et (c) fraise (Figures issues de (Altintas et Weck, 2004))..

Ici encore l'analogie avec l'instabilité de tôle ondulée vient du fait que deux mécanismes couplés sont à l'origine du broutement : les vibrations dans la machine outil et l'arrachage de matière par l'outil.



FIGURE 3.7 – **Champ de bosses sur une piste de ski.** Les bosses ont toute la même taille et sont organisées selon un motif régulier qui remonte la piste de quelques mètres par mois (source : google image).

### 3.4 Formation des bosses en ski

Un exemple très spectaculaire de formation de rides par l'homme est l'apparition des bosses sur les pistes de ski (figure 3.7). Contrairement à ce que l'on pourrait penser, ces bosses ne sont pas créées volontairement (sauf dans le cas des compétitions), mais se développent progressivement du fait du passage des skieurs. Il paraît un peu surprenant de rapprocher le phénomène des bosses en ski et la tôle ondulée. En effet, la neige ne se comporte pas de la même manière que le sable. De plus, les bosses forment un motif à trois dimensions. Enfin, le skieur est un système biomécanique actif (il peut pousser sur ses jambes) et intelligent (il va chercher à contourner les bosses). Toutefois, la dynamique des bosses possède des points communs avec les rides de la tôle ondulée dont le plus important est que les motifs migrent. En effet, les bosses sur les piste de ski *remontent* la piste (de l'ordre de quelques mètres par mois selon la fréquentation de la piste Bahr et al. [2009]). Elles migrent donc à l'inverse du sens des skieurs comme cela peut être le cas avec la tôle ondulée. En 2002, Egger proposa un modèle de la formation des bosses sur les pistes de ski (Egger [2002]). Plus que les résultats et les analogies avec la tôle ondulée, c'est la démarche utilisée qui est à retenir. Ce modèle repose sur le couplage entre la trajectoire du skieur, l'érosion et déposition de la neige. La trajectoire du skieur est déterminée en lui appliquant le principe fondamental de la dynamique. Ainsi, le skieur est soumis à :

- un terme de gravité faisant intervenir la pente locale de la piste,
- un terme de freinage dû aux frottements du ski sur la piste,
- un terme, plus difficile à justifier, qui caractérise le niveau du skieur. Celui-ci tournera plus ou moins afin d'adapter la pente locale sous ses skis à son niveau.

Enfin, l'érosion de la piste est déterminée en fonction de l'accélération du skieur que l'on peut également voir comme la somme des contraintes qu'il exerce sur la piste. Egger obtient alors un système d'équations qu'il résout numériquement. Le résultat des intégrations successives, simulant le passage de plusieurs skieurs, est donné sur la figure 3.8. On observe sur cette figure un profil qui ressemble effectivement aux champs de bosses. Le point important à retenir est que les bosses sur les pistes de ski sont dues au passage de plusieurs skieurs, tout comme l'instabilité de tôle ondulée qui est générée par le passage de plusieurs voitures.

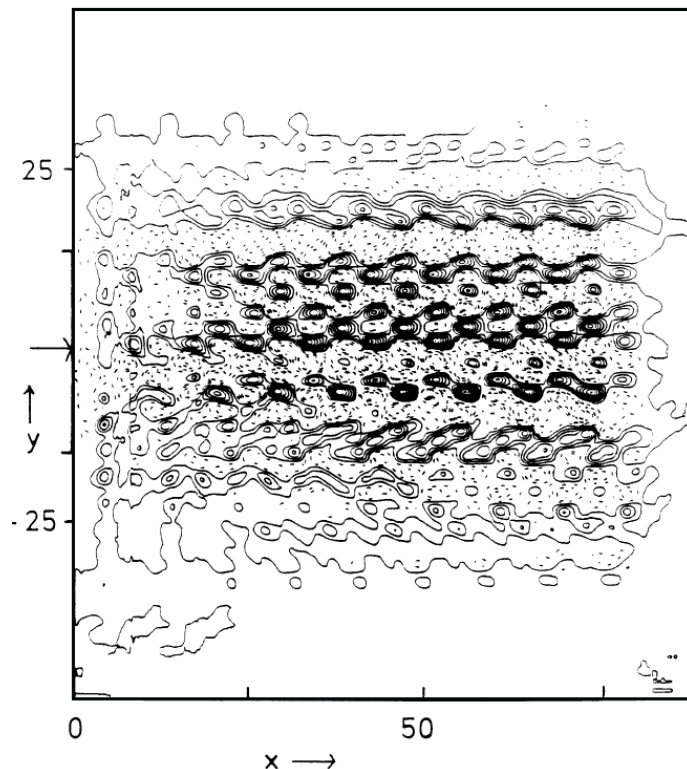


FIGURE 3.8 – **Relief de la piste de ski calculé numériquement** après le passage de 1500 skieurs, aléatoirement introduits au sommet ( $x = 0$ ). Les skieurs se déplacent en moyenne de gauche à droite (D'après Egger [2002]).

Il existe encore d'autres phénomènes similaires à la tôle, la partie suivante présente très succinctement la formation de rides sur les rouleaux d'imprimerie, sur les lubrifiants de disques durs, et également des rides créées par le passage d'une pointe de microscope à force atomique (AFM) sur un substrat. Pour finir, le mécanisme responsable des ricochets est présenté.

## 3.5 Autres phénomènes de formation de rides

### 3.5.1 Rouleau d'impression

Il existe dans les procédés d'imprimerie de type offset, une instabilité similaire à celle de la tôle ondulée. Celle-ci se manifeste sur les cylindres servant à transporter,



moûiller ou encore imprimer le papier (voir la figure 3.9). Lorsque deux rouleaux sont en contact (direct ou via la feuille à imprimer), les efforts exercés sur ceux-ci peuvent faire apparaître à leur surface un motif de rides détériorant alors l'impression. Cette instabilité peut naître de diverses vibrations dans la machine ou du décentrage des rouleaux. On trouve peu d'études sur le sujet, peut-être à cause de secrets de fabrication. On peut toutefois citer les travaux suivants Wahlstrom et al. [1963]; Emmanuel [1985]; Cotgrove [1988].

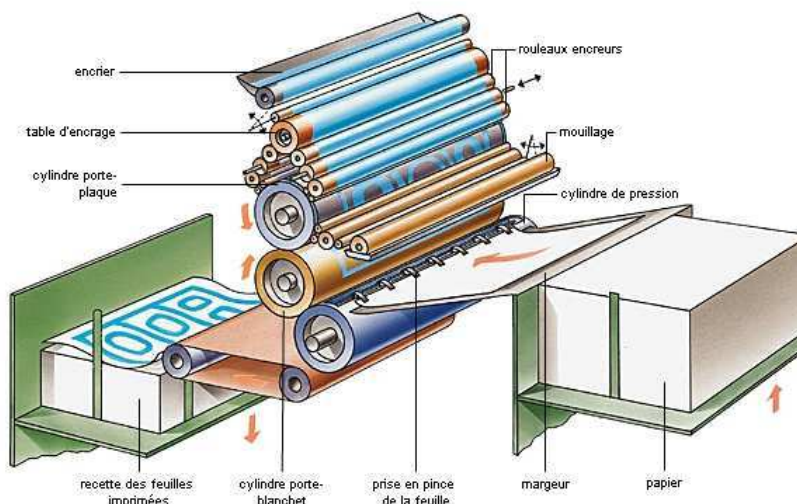


FIGURE 3.9 – Presse offset montrant les nombreux rouleaux employés dans une rotative moderne (D'après le Larousse illustré).

### 3.5.2 Motifs laissés par une pointe d'AFM

Une instabilité qui peut également se rapprocher de l'instabilité de tôle ondulée, mais à bien plus petite échelle, apparaît lorsque l'on déplace une pointe d'AFM sur un substrat (Socoliuc et al. [2003]). En faisant plusieurs passages sur un même endroit de l'échantillon, on voit apparaître un motif régulier consécutif à l'abrasion du substrat. La taille typique du motif est de quelques nanomètres et la longueur d'onde du motif de 40 nanomètres. La figure 3.10 montre un diagramme spatiotemporel de l'apparition des rides créées par 512 passages d'une pointe sur un échantillon de KBr. Le même phénomène a été observé à la surface de polymères solides Leung et Goh [1992].

### 3.5.3 Disques durs

Un phénomène d'apparition de rides existe également au sein de nos ordinateurs, sur les disques durs. Ceux-ci sont constitués d'un disque, en matériau paramagnétique et en rotation, sur lequel est codée l'information sous forme de bits magnétiques. Cette information est codée et lue par une antenne que l'on appelle tête de lecture/écriture, celle-ci étant suspendue à un bras mobile qui la déplace radialement sur le disque. Nos disques durs actuels, d'une capacité de quelques téraoctets, ont un diamètre de 3.5 pouces, ce qui conduit à des bits de  $5 \cdot 10^{-15} \text{m}^2$ . Afin de pouvoir lire et écrire ces bits

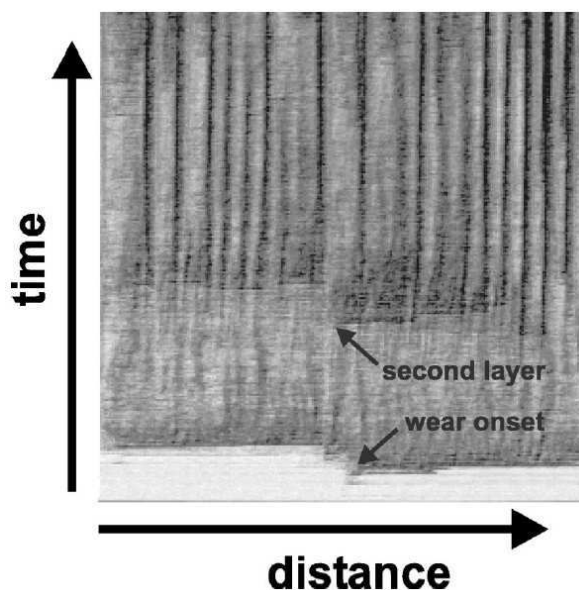


FIGURE 3.10 – Diagramme spatio-temporel d'un motif de rides créé par 512 passages successifs d'une pointe AFM sur une surface de KBr (D'après Socoliuc et al. [2003]).

sans se tromper, il faut que la distance entre le disque et la tête de lecture/écriture soit la plus faible possible. Actuellement, cette distance est comprise entre 3 et 10 nm. À de si faibles distances, les collisions entre la tête et le disque sont fréquentes, surtout au sein des ordinateurs portables. Ce type de collisions, appelé atterrissage peut sévèrement endommager les disques durs en détruisant les bits. Afin d'éviter ce genre de problème, la tête de lecture/écriture est reliée au bras via une *aillette* dont l'aérodynamisme permet de créer un coussin d'air entre la tête et le disque. Malgré ce coussin d'air, les atterrissages restent fréquents et une deuxième solution fut proposée. Celle-ci consiste à enduire le disque d'un lubrifiant rhéo-épaississant sur une épaisseur de 2 ou 3 nm. Ainsi lors d'un atterrissage, le fluide subit un taux de cisaillement gigantesque (quelques  $10^9 \text{ s}^{-1}$ ). Celui-ci se *durcit* alors et protège le disque. Cette technique est actuellement utilisée dans la plupart des disques durs. Toutefois, on observe que le passage répété de la tête de lecture/écriture génère un motif régulier de rides sur le lubrifiant (Marchon et al. [2003]; Dai et al. [2004a,b]; Marchon et al. [2005]). L'amplitude des rides croît exponentiellement pour atteindre quelques nanomètres, soit la hauteur totale de la couche de lubrifiant. Ainsi certains endroits du disque se retrouvent à nu alors que d'autres ont un excès de lubrifiant qui peut entrer en contact avec la tête. Les mécanismes responsables de la formation de ces rides ne sont pas encore éclaircis. Toutefois, on sait qu'elles se forment sans qu'il y ait contact entre la tête et le lubrifiant. Il a alors été proposé que la tête et le lubrifiant sont couplés par des effets aérodynamiques ou par des forces de Van der Waals (Sheng [2011]). Ainsi, même sans contact, la trajectoire de la tête de lecture dépend de l'état de la couche de lubrifiant, comme c'est le cas pour l'instabilité de tôle ondulée et toutes celles présentées jusqu'à présent.

### 3.5.4 Ricochets

Les ricochets que font un galet que l'on jette sur l'eau ne sont pas à proprement parler une instabilité au sens physique du terme. Ils constituent toutefois un problème fascinant (Bocquet [2003]) qui possède quelques analogie avec la tôle ondulée et notamment avec l'expérience de Bitbol et al. [2009] où l'objet tiré sur la route est une lame inclinée. Récemment, Hewitt et al. (Hewitt et Balmforth [2012]) ont étudié la stabilité d'une lame inclinée tirée sur l'eau. Ils observent qu'à faible vitesse la position de la lame est constante alors qu'à haute vitesse celle-ci se met à osciller verticalement autour d'une position moyenne. Ce type d'expérience ressemble à la tôle ondulée, à la différence que l'instabilité n'est pas due au passage répété de la plaque sur l'eau. En effet, les oscillations apparaissent au premier tour de piste, sur un lit (d'eau) plat. Néanmoins, ce comportement peut se retrouver dans l'expérience de tôle ondulée à très haute vitesse : bien au-delà du seuil de l'instabilité la plaque se met à rebondir sur la piste dès le premier tour.

## 3.6 Synthèse

Il semble que les mécanismes responsables de la tôle ondulée se retrouvent dans de nombreuses situations comme l'usure ondulatoire des rails, le broutement, les dunes de sable, l'instabilité de la couche de lubrifiant d'un disque dur, la création de rides sous la pointe d'un AFM ou encore l'apparition des rides sur les rouleaux d'imprimerie. Tout ces phénomènes sont de nature très différentes de par les matériaux qui les constituent (sable, eau, air, acier, disque dur, cristal de KBr...) et par les interactions et méthodes d'abrasions mises en jeu (transport de grains, compaction, abrasion, fluage, interactions hydrodynamiques, interaction de Van der Waals). Toutefois, le même schéma se dessine dans chacune des instabilités citées précédemment : un *objet* (solide ou fluide) se déplace à la surface d'un substrat, le profil de ce substrat modifie alors la trajectoire de l'objet, et du fait de sa dynamique, l'objet va appliquer en retour une contrainte sur le substrat, ce qui le modifiera progressivement à chaque passage. La figure 3.11 illustre ce couplage entre dynamique de l'objet et déformation du substrat. En complément le tableau suivant récapitule les caractéristiques des différentes instabilités présentées (objet en mouvement, substrat, équation régissant la dynamique de l'objet, mécanisme de déformation du substrat).

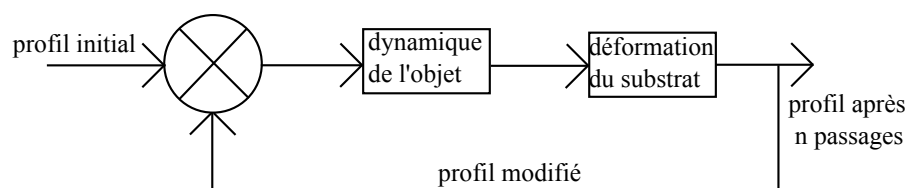


FIGURE 3.11 – Illustration du couplage responsable des différentes instabilités présentées.

Instabilité	Objet	Dynamique	Substrat	Mécanisme de déformation
Tôle ondulée	Véhicule roue/lame	PFD	Lit de grains	Érosion mécanique
Usure Ondulatoire	Train, roue	PFD	Rail	Usure Plasticité
Rides et Dunes	Fluide eau/air	Navier-Stokes	Lit de grains	Érosion visqueuse
Broutement	Outils de coupe	PFD	Pièces à usiner	Éjection de matière
Bosses sur Piste de Ski	Skieur	PFD	Neige	Érosion mécanique
Ondulation imprimerie	Cylindre	PFD	Cylindre d'impression	Usure
Rides AFM	Pointe AFM	PFD	Polymères Cristaux	Usure
Disque Dur	Tête de lecture	PFD	Lubrifiant	Aérodynamisme Van der Waals

Ainsi, un des objectifs de la première partie de cette thèse est de mettre en exergue les différentes forces agissant sur un véhicule roulant sur une route en sable afin d'en connaître la dynamique, puis d'identifier les mécanismes responsables de l'érosion et de la déposition du sable pendant le passage du véhicule.

## Deuxième partie

### UNE MODÉLISATION SIMPLIFIÉE DE LA TÔLE ONDULÉE



# Chapitre 1

## Méthodes expérimentales et numériques

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Expériences . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>1.2</b>	<b>Simulations numériques . . . . .</b>	<b>56</b>
1.2.1	Introduction . . . . .	56
1.2.2	Algorithme . . . . .	56
1.2.3	Détection des collisions . . . . .	57
1.2.4	Modèle de force . . . . .	58
1.2.5	Intégration . . . . .	59
1.2.6	Cas particuliers des simulations de tôle ondulée . . . . .	60

---

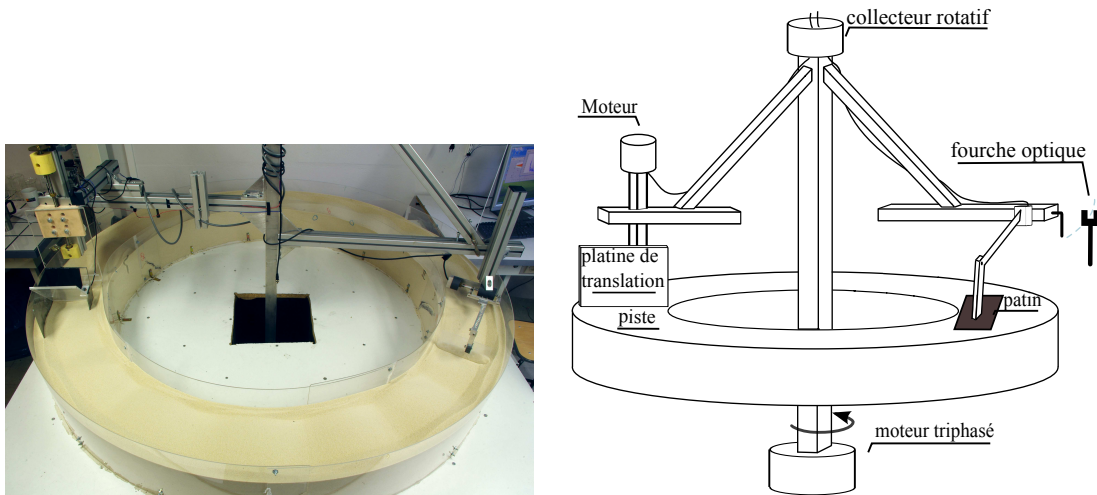


FIGURE 1.1 – **Photographie et schéma de l'expérience de tôle ondulée.** Deux bras opposés sont mis en rotation au dessus d'une piste circulaire de 5 m de périmètre. Un des bras supporte une plaque inclinée dont on impose la position verticale, l'autre supporte également un patin incliné mais qui est fixé à l'extrémité d'un pendule libre de pivoter.

## 1.1 Expériences

Le dispositif expérimental utilisé afin de reproduire et d'étudier l'instabilité de tôle ondulée est schématisé sur la figure 1.1. Il est constitué d'une piste circulaire de 80 cm de rayon soit un périmètre de 5 m, remplie par environ 300 kg de sable, la largeur de la piste est de 25 cm. Ceci correspond à une hauteur de 25 cm de sable. Le sable utilisé dans nos expériences est du sable couramment utilisé pour décaper les façades des bâtiments, ce sable présente l'avantage d'être tamisé (les grains ont une taille comprise entre 200 et 500  $\mu\text{m}$ ) et d'être également lavé de toute poussière. Au centre de la piste se trouve un axe supportant deux bras sur chacun desquels est fixé un patin incliné. L'axe central est mis en rotation via un moteur triphasé asynchrone d'une puissance nominale de 1.5 kW qui peut l'entraîner jusqu'à 1 tour par seconde soit une vitesse à l'extrémité des bras de 6  $\text{m.s}^{-1}$ . Toutefois nous ne l'avons jamais fait tourner à une telle vitesse pour des questions de sécurité. Nous nous sommes limités à une vitesse de rotation maximale d'un tour toutes les trois secondes. Afin de mesurer cette période de rotation et également le nombre de tours effectués nous avons installé à l'extérieur de la piste une fourche optique qui est croisée à chaque tour par un objet fixé sur un des bras. Un faisceau de lumière infrarouge traverse le centre de ce capteur en U et atteint un phototransistor qui agit alors comme un interrupteur ouvert entre sa base et son collecteur. Lorsque le faisceau est coupé (par le passage d'un objet entre la fourche du capteur), le phototransistor ne laisse plus passer le courant. La mesure de la tension entre la base et le collecteur permet donc de détecter le passage de l'objet à chaque tour. La figure 1.2 illustre le fonctionnement du compteur de tour et un exemple de signal obtenu lors de la coupure du faisceau est donné sur la figure 1.3(a).

Le moteur triphasé est alimenté par un variateur (marque LENZ, modèle E82EV152K4C) que l'on a commandé en tension. La figure 1.3(b) représente la fréquence de rotation de l'axe central en fonction de la tension de commande fournie au variateur, cette courbe



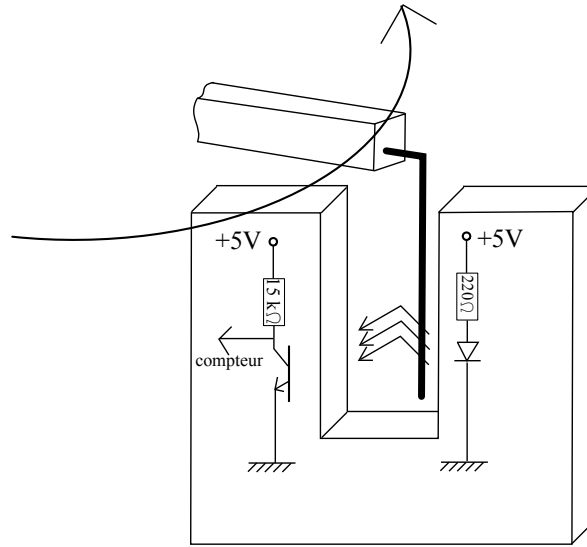


FIGURE 1.2 – **Schéma de la fourche optique** utilisée pour compter le nombre de tours et leur durée. Lorsque le faisceau infrarouge émis par la diode est coupé par une tige montée sur un des bras de l'expérience, le phototransistor devient bloqué et la tension entre sa base et son collecteur n'est plus nulle.

servira de calibration par la suite.

Les patins fixés sur les bras sont représentés sur la figure 1.4, l'un travaille à position imposée, l'autre à force normale constante. Ce dernier est constitué d'une tige de 60 cm reliée à une de ses extrémités au bras par une liaison pivot (voir figure 1.4(b)). À l'autre extrémité est fixée une plaque en PVC inclinée à  $45^\circ$ , sur laquelle il est possible d'ajouter des poids afin de l'alourdir. C'est ce patin qui sert à modéliser la voiture dans l'expérience de tôle ondulée, tout comme dans les travaux préliminaires de (Bitbol et al. [2009]). On peut avoir accès à son altitude en mesurant l'angle que fait la tige avec l'horizontale. Pour cela, nous avons utilisé deux capteurs différents. Le premier est un simple potentiomètre rotatif relié à la tige. Celui-ci est alimenté entre  $-15$  et  $+15$  V, le potentiel de la troisième patte du potentiomètre est alors proportionnelle à l'angle entre la tige et l'horizontale. Sur la figure 1.3(d) est tracée la tension mesurée à la troisième patte du potentiomètre ( $U_{\text{potentiometre}}$ ) en fonction de l'inclinaison de la tige ( $\theta$ ). Ce système à l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre et d'être très peu onéreux (le potentiomètre utilisé coûte cinq euros). Par contre, il rajoute des frottements entre la tige et le bras. C'est pourquoi, nous avons également utilisé un capteur d'angle magnétique qui mesure sans contact l'orientation du moment magnétique d'un aimant permanent fixé sur la tige. La figure 1.3(e) présente l'étalonnage de ce capteur, la tension fournie par le capteur ( $U_{\text{magnetique}}$ ) est tracée en fonction de l'inclinaison de la tige ( $\theta$ ). Ce type de capteur est bien plus cher que le précédent (environ 1000 euros) mais ne rajoute aucun frottement. Par contre, comme ce capteur d'angle mesure un champ magnétique, il est également sensible au champ magnétique terrestre et pour une même inclinaison de la tige il délivre des tensions différentes (de quelques %) selon que le bras pointe vers le nord ou vers le sud. Heureusement, il est possible dans le traitement du signal de soustraire la composante due au champ magnétique terrestre.

Sur le bras opposé, nous avons installé un patin de 14.5 cm de large, 20 cm de long

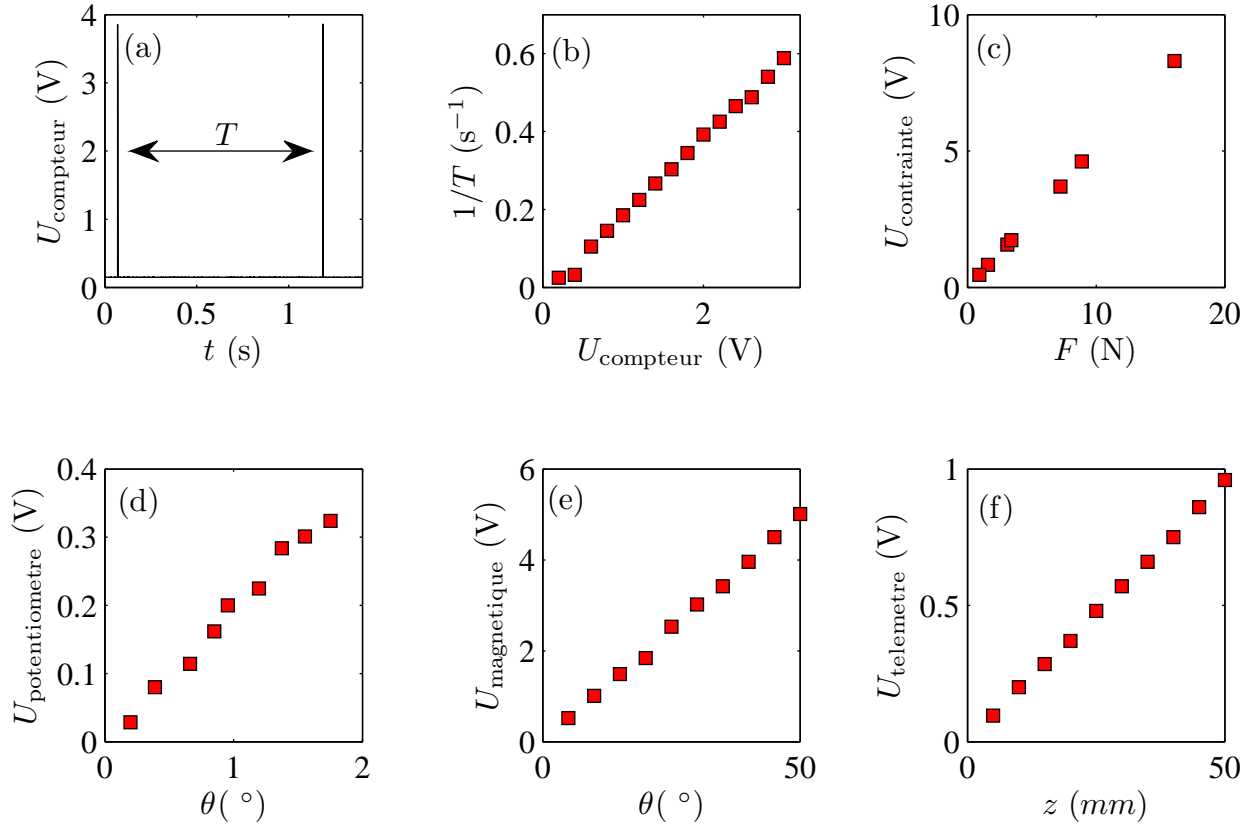


FIGURE 1.3 – **Étalonnage des différents éléments de l'expérience.** a) Signal émis par le compteur de tours. b) Fréquence des tours en fonction de la tension d'entrée du variateur. c) Courbe d'étalonnage des capteurs de force. d) Courbe d'étalonnage du télémètre laser. e) Courbe d'étalonnage des potentiomètres utilisés comme capteur d'angle. f) Courbe d'étalonnage du capteur d'angle magnétique.

et d'inclinaison variable sur une platine de translation verticale pilotée par un moteur pas à pas (voir figure 1.4(b)). Ce système que j'ai réalisé à l'atelier de mécanique au début de ma thèse permet de contrôler l'altitude du patin avec une précision de  $5 \mu\text{m}$ . Cette précision qui correspond à un centième de la taille d'un grain peut sembler inutile, cependant, lorsque la plaque charrie du sable, si elle s'enfonce de  $100 \mu\text{m}$ , sur un tour elle aura récolté plus de 70 mL de sable. La connexion mécanique entre la platine de translation et le patin passe par deux jauges de contraintes (TESTWELL KD40S) montées en parallèle. Le fait de mettre deux capteurs en parallèle permet de réduire le couple agissant sur chacun et augmente aussi la rigidité de l'ensemble. Ces capteurs sont alimentés sous une tension de 10 V et procurent en sortie une tension proportionnelle à la force normale qui leur est appliquée. Les tensions fournies par ces deux capteurs sont ensuite additionnées et amplifiées (TESTWELL GSV-1A). La figure 1.3(c) donne une courbe d'étalonnage de ces capteurs en représentant la tension de sortie  $U_{\text{contrainte}}$  en fonction de la force normale appliquée. Comme ces capteurs ne sont sensibles qu'à la force normale, il est impossible de mesurer simultanément la force horizontale (trainée)

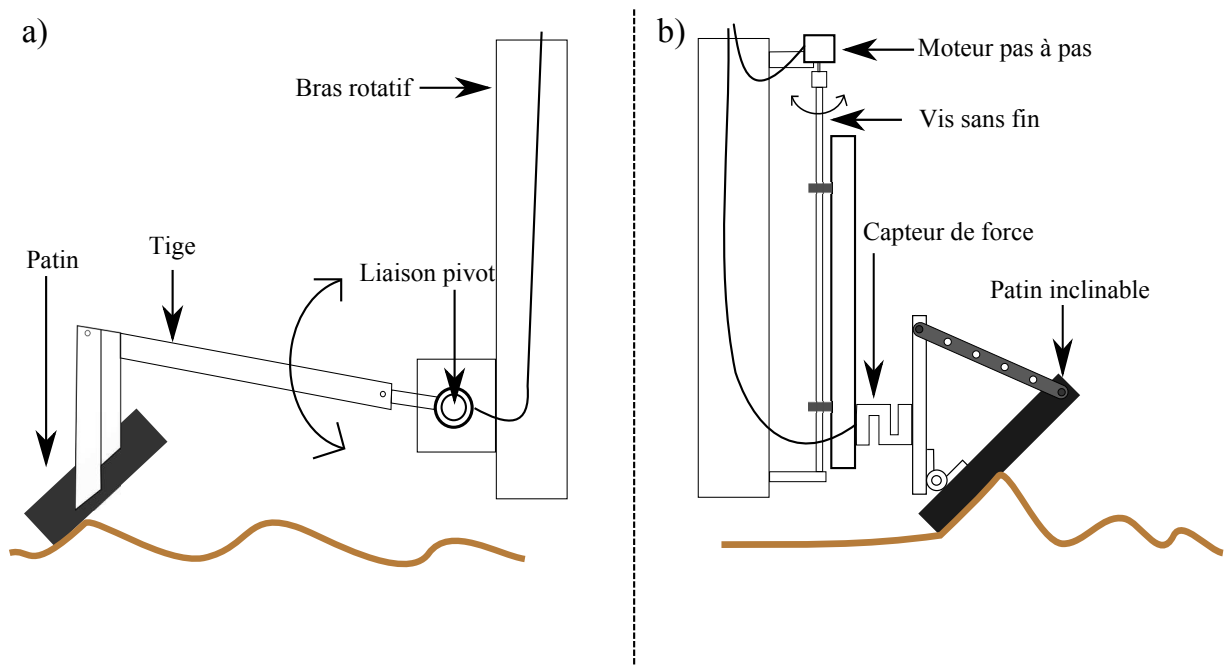


FIGURE 1.4 – **Croquis des deux patins inclinés.** a) Schéma du patin libre de se déplacer verticalement. Il est fixé au bout d'une tige de 60 cm rattachée au bras par un roulement à bille. La tige peut alors osciller librement autour de l'horizontale et ainsi on peut supposer que le patin est uniquement soumis à son poids et la réaction du sable, et qu'il peut se déplacer librement selon la verticale. b) Schéma du patin dont l'altitude est fixe. Une platine de translation réalisée à l'atelier de mécanique permet d'ajuster la position verticale du patin avec une précision de  $5\ \mu\text{m}$ . Ce patin est inclinable et l'angle qu'il fait avec l'horizontale peut varier de 15 à 75 degrés

et la force verticale (portance) agissant sur la plaque. Il a alors été nécessaire de les réorienter entre chaque mesure de force. Afin de mesurer l'altitude de la plaque ou le profil de la piste deux télémètres laser (OPTONCDR 1302 de MICRO-EPSILON) ont été utilisés. Ce type de capteur envoie un faisceau laser vers une surface dont on veut connaître la position. Une lentille convergente fait l'image de la tâche laser sur un détecteur optique de position (*position sensitive sensor*, *PSD*), une relation géométrique relie alors la distance séparant le capteur de la surface et la position de l'image de la tâche laser sur la diode du PSD. La figure 1.3(f) est une courbe d'étalonnage d'un des télémètres laser et présente la tension de sortie du capteur  $U_{\text{telemetre}}$  en fonction de la distance  $z$  séparant le capteur de la platine de translation. Le deuxième patin dont on contrôle l'altitude est utilisé dans l'expérience de tôle ondulée afin de lisser la piste (ou de préparer un profil déjà ondulé) avant de faire passer le patin libre. De plus, nous l'avons utilisé afin de mesurer les efforts de portance et de trainée auquel il est soumis lorsqu'il charrie du sable. Il est également possible d'embarquer une caméra sur un des bras de l'expérience comme nous le verrons dans la partie 2. Le moteur pas-à-pas et les différents capteurs embarqués sur les bras en rotation sont reliés à une carte d'acquisition (NI-USB 6289) grâce à un collecteur rotatif à 44 pistes. L'acquisition des données est faite via le logiciel LABVIEW puis ces données sont traitées sous MATLAB. En parallèle de ces expériences, nous avons mené des simulations numériques dont le

principe est décrit au paragraphe suivant.

## 1.2 Simulations numériques

### 1.2.1 Introduction

Les simulations numériques apportent depuis quelques décennies un nouveau moyen d'étude de nombreux phénomènes (Wolf [1996]). Grâce à la montée en puissance de la capacité de calcul de nos ordinateurs, il est désormais possible de simuler le comportement d'un milieu granulaire avec un nombre de grains raisonnable (de 10 000 à 100 000 grains) en un temps lui aussi raisonnable (quelques heures à quelques jours sur un processeur d'ordinateur de bureau). Les simulations numériques sont un moyen complémentaire aux expériences et à la théorie. Elles permettent de faire varier et de mesurer des grandeurs physiques inaccessibles expérimentalement. De plus, dans les simulations numériques on peut absolument tout contrôler, ce qui n'est pas toujours le cas expérimentalement. En revanche, il reste encore difficile actuellement de simuler un système de grande taille. De plus, toutes les simulations dépendent des modèles utilisés pour décrire les forces d'interaction entre les grains.

Il existe plusieurs méthodes pour simuler un milieu granulaire (dynamique moléculaire de sphères molles, automate cellulaire ou encore code event-driven). Ici, nous avons choisi d'utiliser un code de dynamique moléculaire à deux dimensions (Allen et Tildesley [1987]). Cette approche consiste à résoudre les équations fondamentales de la dynamique pour chaque particule afin de calculer sa trajectoire au cours du temps. Ainsi, on a accès à tout instant à l'état du système (positions et vitesses linéaires et angulaires des toutes les particules ainsi que l'ensemble des forces auxquelles elle sont soumises).

Dans ce chapitre, nous présentons l'algorithme de dynamique moléculaire en détaillant les méthodes permettant d'optimiser les temps de calcul. Par la suite, les résultats obtenus dans les simulations seront mis en parallèle ou en complément des résultats expérimentaux.

### 1.2.2 Algorithme

Pour modéliser l'évolution du milieu granulaire, on se donne  $N$  particules circulaires indicées par  $i \in [0; N - 1]$ , on note  $(x_i, y_i)$  leur position et  $r_i$  leur rayon. Ces disques sont placés dans un plan de taille  $L \times H$ . L'algorithme suit plusieurs étapes :

1. On calcule pour chaque particule  $i$ , les résultantes des forces  $\vec{F}_i$  et des moments  $\vec{\Gamma}_i$  auxquels elle est soumise. Ces forces et moments peuvent éventuellement dépendre de la position et de la vitesse de toutes les particules.
2. Les équations du mouvement (principe fondamental de la dynamique et théorème du moment cinétique) sont alors intégrées avec un schéma d'intégration numérique adéquat pendant un petit intervalle de temps  $dt$ .
3. Les nouvelles positions et vitesses des particules viennent alors remplacer les anciennes, on incrémente le temps de  $dt$  et on revient à l'étape 1.

Ces trois étapes sont répétées autant de fois que nécessaire pour que le système évolue jusqu'à l'état souhaité. Pour nos simulations nous répétons ce processus typiquement  $10^7$  fois. Pour que l'on puisse intégrer les équations du mouvement de cette façon pendant l'intervalle  $dt$ , il est nécessaire que  $dt$  soit petit devant le temps typique de variation des forces. Nous verrons plus loin comment nous avons choisi  $dt$ .

### 1.2.3 Détection des collisions

Comme présenté plus haut, la première étape de la dynamique moléculaire est le calcul des forces agissant sur les grains. Or, nous modélisons ici des grains qui interagissent uniquement par contact. Il est donc nécessaire de trouver les contacts entre les grains. Naïvement, la première chose que l'on envisage est de prendre chaque grain, calculer la distance le séparant de tous les autres et comparer cette distance à la somme de leur rayon. Il s'agit d'une opération qui n'est pas du tout optimisée car pour chaque grain on calcule  $N - 1$  distances alors qu'on sait qu'à 2D (avec des grains monodisperses) il ne peut y avoir au maximum que 6 contacts par grains. Ainsi, dans  $\frac{N-7}{N-1} \%$  des cas l'algorithme calcule une distance pour rien (soit 99,94 % des cas pour  $N=10000$ !). Si l'on veut que les simulations se fassent en un temps raisonnable, il convient d'utiliser une méthode plus subtile qui réduit ce temps de calcul.

La méthode des cellules liées permet de réduire considérablement le nombre de distances à calculer et donc le temps de calcul. Cette méthode consiste à superposer une grille à l'espace 2D de la simulation, les cellules de cette grille ont une taille légèrement supérieure à la taille d'un grain. Ainsi, deux grains sont en contact uniquement s'ils se trouvent dans la même cellule ou dans des cellules voisines. Il s'agit alors de repérer quels sont les grains présents dans une case de la grille. Pour cela, nous utilisons l'algorithme suivant :

- On crée un tableau à deux dimensions  $HoC[Nx][Ny]$  (*Head of Cell*), où  $N_x$  et  $N_y$  sont le nombre de lignes et de colonnes de la grille. On crée aussi une liste à une dimension  $Liste[N]$ .
- Le tableau et la liste sont initialisés à -1.
- Pour chaque particule  $i$ , on cherche dans quelle cellule elle se trouve : il suffit simplement de prendre la partie entière de  $x_i/T$  et  $y_i/T$ , où  $T$  est la taille des cellules.
- Si  $HoC[E(\frac{x_i}{T})][E(\frac{y_i}{T})] = -1$  alors lui assigne  $i$ , sinon, la particule  $j = HoC[E(\frac{x_i}{T})][E(\frac{y_i}{T})]$  est déjà présente dans la cellule, dans ce cas, on remplit la liste de la façon suivante  $Liste[i] = j$  et  $HoC[E(\frac{x_i}{T})][E(\frac{y_i}{T})] = i$ .

Une fois le tableau et la liste remplis, il est facile de savoir quels sont les grains présents dans une cellule. Pour cela, on regarde quelle valeur contient  $HoC[n_x][n_y]$ , si c'est -1 c'est qu'il n'y a aucun grain, sinon, il y a le grain  $i$ . Il suffit ensuite de dérouler la liste pour savoir quels sont les autres grains dans cette cellule. Si l'on veut connaître les particules en collision avec le grain  $i$ , il suffit alors de chercher dans quelle cellule il se trouve puis d'identifier les particules présentes dans la même cellule et dans les cellules adjacentes. On effectue alors le test sur la distance entre les grains et leur rayon uniquement sur les particules trouvées (typiquement moins d'une dizaine) ce qui réduit considérablement le temps de calcul. Une fois les collisions détectées, il convient ensuite de calculer les forces agissant entre les grains.

### 1.2.4 Modèle de force

La première force à laquelle on peut penser et qui s'applique à tous les grains est la gravité : on l'ajoute à chaque grain au début de l'algorithme. Les autres forces en présence sont des forces de contact. La force de contact entre deux grains peut s'écrire comme la somme de trois termes : une répulsion, une dissipation, un frottement solide. Chacun de ces termes doit être modélisé.

**Force de répulsion** Pour modéliser la répulsion entre deux disques, nous avons utilisé la théorie de l'élasticité linéaire. Ainsi, la force de répulsion entre deux disques s'écrit :

$$F_r = \frac{\pi}{8} E^* \delta = k_n \delta, \quad (1.1)$$

où  $E^*$  est le module d'Young 2D des grains et  $\delta$  l'interpénétration entre les grains :  $\delta = r_i + r_j - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$

Cette expression de la force de répulsion présente un avantage numérique important. La durée des collisions ( $\Delta t_{\text{coll}}$ ) entre deux particules est toujours la même, quelle que soit la vitesse des particules avant le choc. Cette durée fixe donc une limite pour l'incrément de temps  $dt$ , il faut :  $dt \ll \Delta t_{\text{coll}}$  (typiquement  $dt$  vaut un centième de  $\Delta t_{\text{coll}}$ ). On voit donc apparaître ici une première limitation de la dynamique moléculaire. En effet, si l'on veut garder un temps de calcul raisonnable, il faut que le temps d'une collision ne soit pas trop court pour que  $dt$  ne soit pas trop petit. En pratique, cela se traduit par le fait que les grains que l'on simule sont plus mous que dans la réalité.

**Dissipation** Afin de rendre compte de l'inélasticité du contact entre deux grains, il faut rajouter une force dissipative lors de la collision. La façon la plus simple et d'écrire cette force sous la forme d'un frottement visqueux :

$$F_d = -\gamma \dot{\delta}, \quad (1.2)$$

où  $\gamma$  est un coefficient de viscosité choisi afin d'obtenir le coefficient de restitution désiré pour les grains. En effet, dans ces conditions le principe fondamental de la dynamique appliqué aux grains en collision aboutit à l'équation suivante pour  $\delta$  :

$$m\ddot{\delta} + \gamma\dot{\delta} + k_n\delta = 0. \quad (1.3)$$

On peut alors calculer le temps de collision  $\Delta t_{\text{coll}}$  et le coefficient de restitution  $e$  :

$$\Delta t_{\text{coll}} = \pi \sqrt{\frac{m}{k_n}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2mk_n}}} \quad (1.4)$$

$$e = \exp\left(-\frac{\gamma}{2m} \Delta t_{\text{coll}}\right) \quad (1.5)$$

Bien que ce modèle ne soit pas justifié physiquement, il a l'avantage d'être très simple et de fournir des résultats comparables aux expériences.

**Frottement solide** Dans le milieu granulaire que nous voulons modéliser, le frottement solide entre deux grains obéit à la loi de Coulomb :

$$\begin{cases} \|F_t\| = \mu_d \|F_n\| & \text{si } v_g \neq 0 \\ \|F_t\| \leq \mu_s \|F_n\| & \text{si } v_g = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

$F_t$  représente l'effort tangentiel d'un grain sur l'autre et  $F_n$  la composante normale,  $\mu_s$  et  $\mu_d$  sont les coefficients de frottement statiques et dynamique. Dans nos simulations nous avons pris :  $\mu_s = \mu_d = \mu$ . Ainsi, lorsque la vitesse de glissement  $v_g$  est non nulle, la friction est simplement proportionnelle à la force normale. Par contre, dans le cas contraire, la loi de Coulomb ne donne qu'une borne supérieure à la norme de la force de frottement. Cette force est donc indéterminée dans le cas où le glissement est nul ce qui pose problème car il est obligatoire de lui donner une valeur pour intégrer les équations du mouvement. Des solutions existent toutefois pour répondre à ce problème. On peut par exemple régulariser la loi de Coulomb comme présenté sur la figure 1.5. Il s'agit de raccorder les deux parties  $v_g < 0$  et  $v_g > 0$  par un segment de pente finie. La pente de cette régularisation doit être suffisamment grande pour que dès qu'un glissement apparaît  $F_t$  vaille  $\mu F_n$ . Cette solution ne peut toutefois pas s'appliquer au cas où les grains forment un empilement statique car elle donne un frottement nul lorsque la vitesse de glissement est nulle.

Une méthode pour remédier à ce problème est l'emploi d'un ressort tangentiel entre les grains. Le modèle de Cundall (Cundall et Strack [1979]) propose d'utiliser l'expression suivante pour la force tangentielle :

$$\|F_t\| = \min(\|k_t u_t\|, \|\mu F_n\|), \quad (1.7)$$

où  $u_t$  est le déplacement tangentiel d'un grain sur l'autre et  $k_t$  la constante de raideur associée au ressort tangentiel. Ainsi, cette force dépend de la trajectoire des grains et donc de l'histoire du contact. L'avantage d'un tel modèle est qu'il peut donner un frottement non nul dans le cas d'un contact statique. De plus, ce frottement dépend de l'histoire du contact.

### 1.2.5 Intégration

Une fois que toutes les forces agissant sur les grains sont connues, il convient d'intégrer les équations du mouvement pour tous les grains :

$$\forall i \in [0, N-1], \quad m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}, \quad (1.8)$$

où  $\vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{F}_{rj \rightarrow i} + \vec{F}_{dj \rightarrow i} + \vec{F}_{tj \rightarrow i}$ . La première méthode à laquelle on peut penser pour intégrer ces équations est la méthode d'Euler, cependant cette méthode introduit une erreur de l'ordre de  $dt^2$  et il faut donc un incrément de temps très faible pour minimiser les erreurs. La méthode que nous avons retenue est la méthode de Verlet, elle n'introduit une erreur qui n'est que de l'ordre de  $dt^4$ . Celle-ci consiste à faire le développement limité de  $\vec{r}(t + dt)$  et de  $\vec{r}(t - dt)$  à l'ordre 3 :

$$\vec{r}(t + dt) = \vec{r}(t) + \partial_t \vec{r}(t) dt + \frac{1}{2} \partial_t^2 \vec{r}(t) dt^2 + \frac{1}{6} \partial_t^3 \vec{r}(t) dt^3 + \mathcal{O}(dt^4)$$

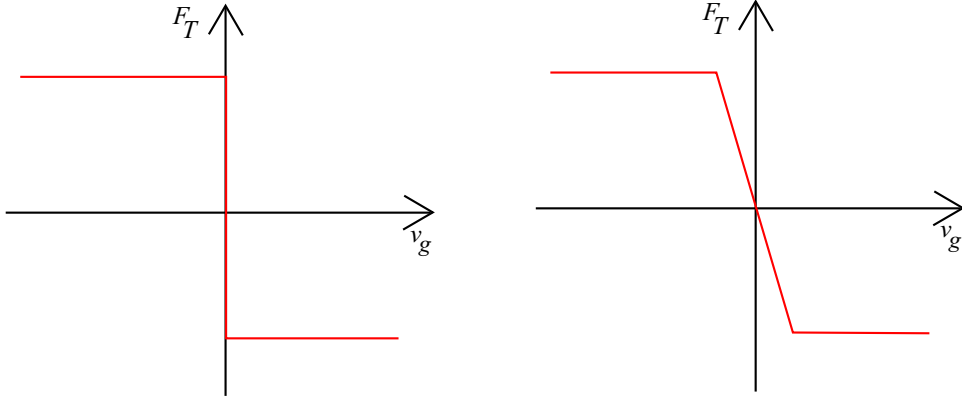


FIGURE 1.5 – **Régularisation de la loi de Coulomb.** À gauche, représentation de la loi de Coulomb : la force de frottement  $F_t$  a un signe opposé à la vitesse de glissement et n'a pas d'expression littérale pour  $v_g = 0$ . À droite, régularisation de la loi de Coulomb, un segment de pente finie raccorde les parties  $v_g < 0$  et  $v_g > 0$ .

$$\vec{r}(t - dt) = \vec{r}(t) - \partial_t \vec{r}(t) dt + \frac{1}{2} \partial_t^2 \vec{r}(t) dt^2 - \frac{1}{6} \partial_t^3 \vec{r}(t) dt^3 + \mathcal{O}(dt^4)$$

En faisant la somme terme à terme de ses deux équations on obtient alors :

$$\vec{r}(t + dt) + \vec{r}(t - dt) = 2\vec{r}(t) + \partial_t^2 \vec{r}(t) dt^2 + \mathcal{O}(dt^4) \quad (1.9)$$

Ainsi, en remplaçant  $\partial_t^2 \vec{r}(t) dt^2$  par  $\vec{F}/m$ , on obtient :

$$\vec{r}(t + dt) = 2\vec{r}(t) - \vec{r}(t - dt) + \vec{F}/m dt^2 + \mathcal{O}(dt^4). \quad (1.10)$$

Cette méthode d'intégration permet donc d'avoir une erreur de l'ordre de  $dt^4$ , il suffit juste de garder en mémoire la position des grains à l'instant  $t - dt$ . Le schéma utilisé est donc le suivant :

$$r_{new} \leftarrow 2r - r_{old} + \vec{F}/m dt^2$$

$$r_{old} \leftarrow r$$

$$r \leftarrow r_{new}$$

On remarquera que lors de l'initialisation de la simulation, il faudra donner non seulement la position des grains à l'instant  $t$  mais également à l'instant  $t - dt$ , c'est-à-dire la vitesse initiale des grains.

### 1.2.6 Cas particuliers des simulations de tôle ondulée

Afin de simuler plusieurs passages d'un véhicule sur la piste, on impose des conditions aux limites périodiques selon l'axe horizontal. Les grains sortant d'un côté de la piste sont réintroduits de l'autre. Concrètement, à chaque pas de temps on effectue le



test suivant pour chaque particule :

$$\begin{cases} \text{si } x_i < 0, \text{ alors } x_i \leftarrow x_i + L \\ \text{si } 0 < x_i < L, \text{ alors } x_i \leftarrow x_i \\ \text{si } x_i > L, \text{ alors } x_i \leftarrow x_i - L \end{cases} \quad (1.11)$$

De même, les grains situés à une des extrémités de la piste peuvent être en contact avec les grains présents à l'autre extrémité. Cette condition aux limites périodiques est donc ajoutée dans le processus de détection des contacts.

L'état initial est créé en positionnant les grains sur un réseau carré de longueur  $L$  et de hauteur  $H$  mais avec un léger bruit dans leur position. Les grains ont également une vitesse initiale aléatoire. On commence par laisser sédimenter cet assemblage de grains sous l'effet de la gravité. Afin d'éviter toute cristallisation, les grains sont légèrement polydispersés (20%). Ainsi, leur rayon est distribué de manière aléatoire et uniforme entre 0.8 et 1.2. Le fond de la piste est alors simplement créé par une monocouche de grains dont la position est maintenue à  $y = 0$ . On laisse évoluer les grains jusqu'à ce que l'énergie cinétique totale soit suffisamment faible (de l'ordre du bruit numérique). Afin de ne pas effectuer cette étape pour chaque simulation cet état deviendra l'état initial pour les simulations de tôle ondulée.

Le véhicule modélisé dans les simulations est similaire à celui utilisé dans les expériences : il s'agit d'une plaque fixée par un bras de levier à une liaison pivot qui est tirée à vitesse horizontale constante. La plaque est faite d'une centaine de grains collés bout à bout, leur rayon est d'un dixième de celui des grains constituant le lit<sup>1</sup>. La longueur du bras est d'une centaine de diamètres de grains et la masse de la plaque est typiquement trois cents fois la masse d'un grain. En pratique, on se donne la position de l'extrémité basse de la plaque ( $X_{\text{plaque}}, Y_{\text{plaque}}$ ) et on fixe la position des autres grains depuis cette position. Tous les grains de la plaque sont traités de manière égale aux autres, la seule différence est que l'on ne résout pas les équations du mouvement qui leur sont associées. On calcule simplement la somme des forces agissant sur les grains de la plaque et on résout le théorème du moment cinétique au système formé de la plaque et du bras de levier. La figure 1.6 montre une image extraite d'une simulation numérique de tôle ondulée.

Au cours de la simulation différentes sauvegardes sont effectuées :

- dès que la plaque a avancé d'un diamètre de grain, on enregistre sa position dans un fichier
- tous les tours, la position de tous les grains est sauvegardée (avec une précision à 7 chiffres significatifs)
- tous les  $M$  tours, une sauvegarde totale de l'état du système est faite (position et vitesse des grains, forces de contact entre les grains, longueur des ressorts tangentiels, rayon des grains, etc.), tout cela avec une précision de 16 chiffres significatifs. Ce type de sauvegarde est là pour pouvoir relancer une simulation inachevée qui a été arrêtée prématurément (suite à une coupure de courant par exemple). Pour des simulations qui durent quelques semaines, ces sauvegardes peuvent être très utiles !

---

1. Nous avons testé plusieurs rayons et raideurs pour les grains formant le patin, aucune différence notable n'a été observé entre ces simulations.

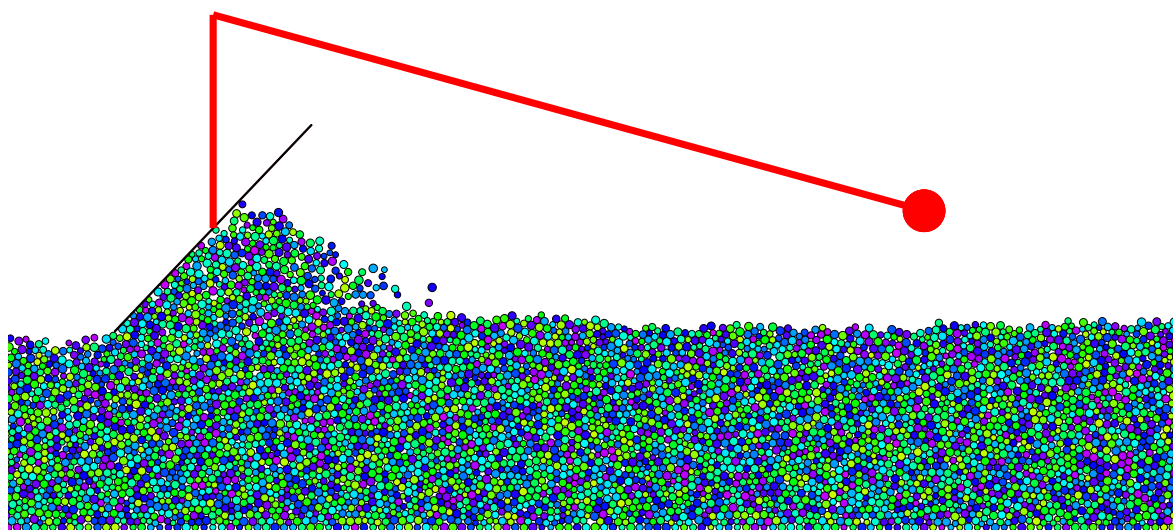


FIGURE 1.6 – Image issue d’une simulation de tôle ondulée, celle-ci ne représente que la zone autour du patin, la simulation est quatre fois plus large. La couleur des grains est aléatoire.

Bien que l’architecture du code de simulation (écrit en C) existait avant ma thèse, je lui ai apporté de nombreuses modifications au cours des trois ans de thèse :

- Nous avons ajouté les sauvegardes totales
- Toutes les grandeurs ont été adimensionnées (on fixe le diamètre moyen  $d$  et la masse moyenne  $\bar{m}$  des grains à 1, l’accélération de la pesanteur vaut également 1. Ainsi, les forces sont adimensionnées par  $\bar{m}g$ ). Nous avons de plus choisi de prendre une raideur de raideur de  $k = 10^4 \bar{m}g/d$ . Ce choix est dû à un critère arbitraire qui veut que deux grains comprimés par une force correspondant au poids de 100 grains s’interpénètrent d’une distance d’un centième de leur diamètre. Le choix de  $k$  conditionne alors la valeur de  $\gamma$  et de  $dt$ . En effet, il faut que  $dt$  soit petit devant la durée d’une collision entre deux grains, nous avons alors choisi  $dt = 10^{-4}$ . De même, si l’on souhaite un coefficient de restitution raisonnable entre les grains, typiquement 0.8, il faut imposer  $\gamma = 7$ . Le coefficient de frottement  $\mu$  est fixé à 0.5.
- Nous avons réécrit le code pour le paralléliser et le faire tourner sur plusieurs processeurs
- Nous l’avons également réécrit pour qu’il s’exécute sur carte graphique et non pas sur processeur. Ceci permet en théorie de faire tourner le code non pas sur 1 ou 4 processeurs mais sur les 250 processeurs de la carte graphique, ce qui peut réduire les temps de calcul d’un facteur 10 ou plus. Cette étape n’a toutefois pas été très concluante. Bien que le code tournait correctement, la carte graphique dont nous disposions n’avait pas assez de mémoire et ne gérât pas les entiers double précision, si bien que l’on ne pouvait simuler qu’un nombre limité de grains qui, de plus, possédait souvent un comportement non physique à cause des arrondis lors de la manipulation d’entiers simple précision. L’achat d’une carte graphique plus performante aurait pu résoudre ces problèmes. Cependant, nous nous sommes aperçu qu’il ne suffisait pas uniquement de faire tourner le code sur

les 250 processeurs d'une carte graphique pour qu'il tourne plus vite, mais qu'il fallait aussi optimiser au maximum le code. Notamment, il faut savoir gérer les transferts de données entre les différents étages de mémoire de la carte graphique. Ceci demande une grande connaissance de l'architecture même de la carte et des compétences informatiques que j'aurais mis trop longtemps à acquérir.

Grâce aux outils expérimentaux et numériques qui ont été présentés, nous avons commencé à étudier les caractéristiques de l'instabilité de tôle ondulée. Il est important de noter que par la suite, les simulations et les expériences seront mises en parallèle et viendront en complément l'une de l'autre.



# Chapitre 2

## Caractéristiques de la tôle ondulée

### Sommaire

2.1	Caractéristiques et vitesses critiques . . . . .	66
2.2	Relation de dispersion . . . . .	70
2.3	Type de bifurcation . . . . .	74
2.4	Conclusion . . . . .	78

## 2.1 Caractéristiques et vitesses critiques

La manière la plus simple d'étudier la tôle ondulée est de tirer le patin à une vitesse horizontale,  $v$ , constante pendant plusieurs tours à partir d'une piste lisse ou contenant une légère perturbation initiale. La figure 2.1 (issue d'une expérience) présente un exemple de la manière dont on peut se représenter l'évolution du profil de la piste. Elle consiste à faire un diagramme spatiotemporel sur lequel la position sur la piste est en abscisse et le nombre de tours en ordonnée, tandis que la couleur symbolise l'altitude du patin (en bleu les positions les plus basses, en rouge les positions les plus hautes). Pour réaliser un tel diagramme spatiotemporel, il suffit de découper le signal fourni par le capteur d'angle du patin sur un tour et de convertir ce signal selon une échelle de couleurs.

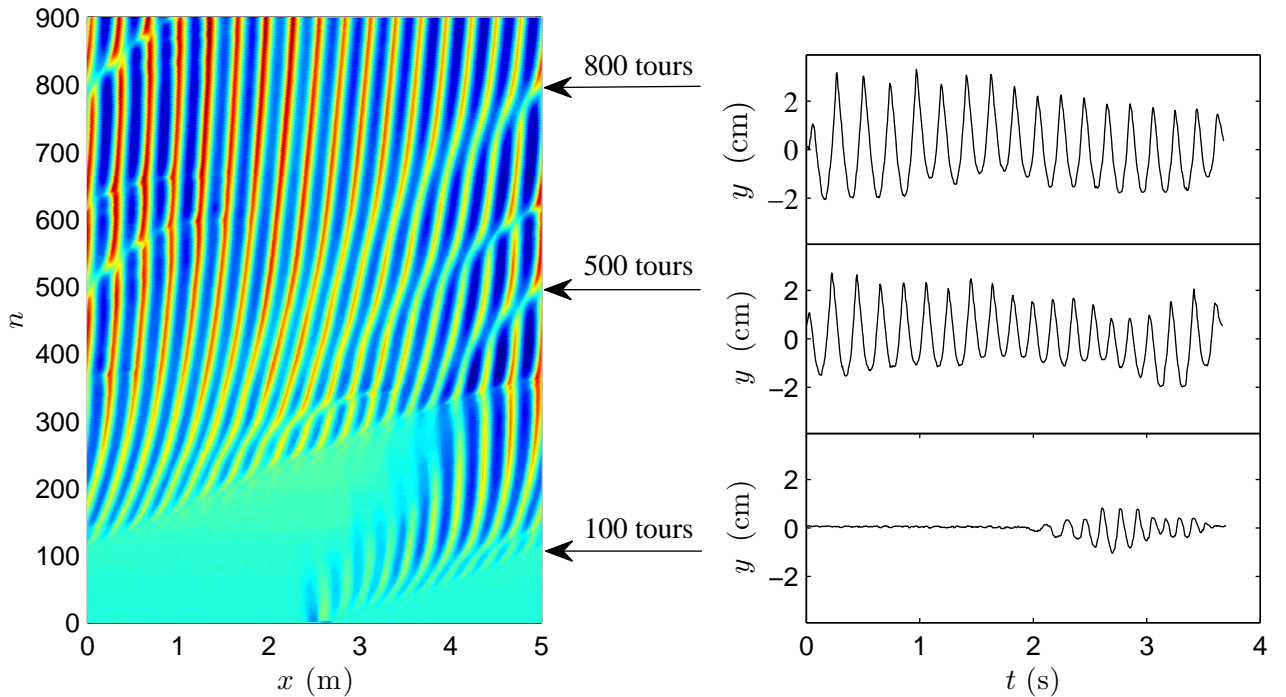


FIGURE 2.1 – **Représentation de l'état de la piste.** À gauche, diagramme spatiotemporel montrant l'évolution de l'altitude d'un patin de 4 cm de large effectuant 900 rotations à 1.3 m.s<sup>-1</sup>. À droite, le signal fourni par le capteur d'angle et découpé sur un tour. Ici on montre les tours 100, 500 et 800. Ce signal est ensuite converti en niveaux de couleurs pour obtenir le diagramme spatiotemporel de gauche.

Dans cet exemple, une perturbation initiale a été générée à un endroit de la piste. On constate que cette perturbation initiale va servir de point de nucléation pour les rides qui en 300 tours vont couvrir toute la piste. À l'instar de Bitbol et al. [2009] on remarque que les rides migrent lentement dans le sens de circulation du patin et que leur longueur d'onde augmente au fil des tours. Ici, le patin a une largeur de 4 cm et avance à 1.3 m.s<sup>-1</sup>. À cette vitesse il perd le contact avec la piste au sommet des rides pour atterrir sur la ride suivante. Nous verrons par la suite que cela à une

importance sur le mûrissement et le sens de migration des rides. La figure 2.2 présente le diagramme spatiotemporel obtenu dans une simulation numérique de tôle ondulée. On remarque, qu'ici aussi on arrive à créer des rides, ce qui confirme bien les résultats obtenus avant ma thèse, à savoir que le problème peut être réduit à deux dimensions et que la cohésion des grains n'est pas nécessaire dans le processus de l'instabilité.

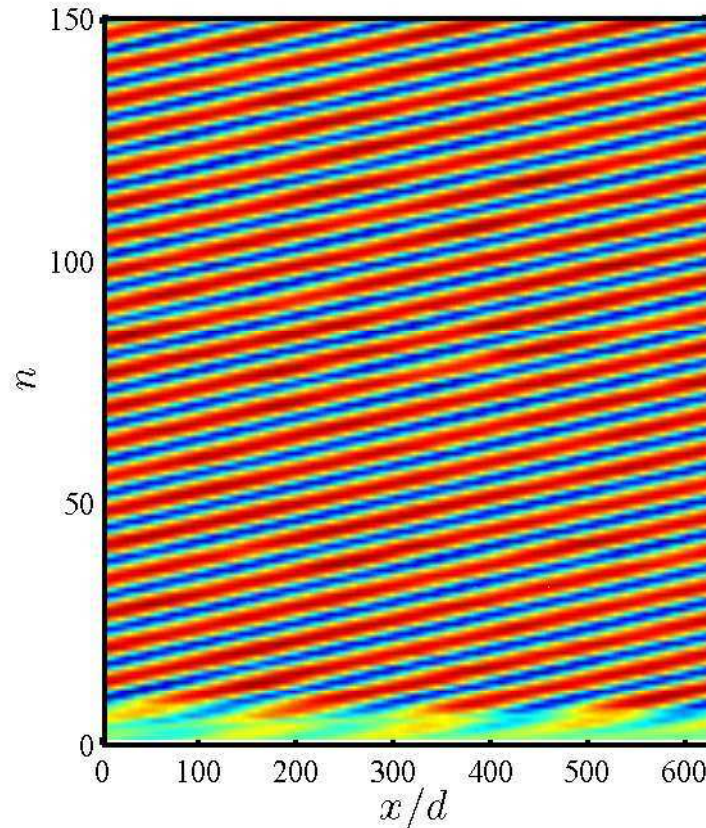


FIGURE 2.2 – **Diagramme spatiotemporel obtenu dans une simulation numérique.** On constate que l'on arrive à recréer les rides. Dans cette simulation, pour une vitesse de  $9\sqrt{gd}$  et une masse de  $300\bar{m}$ , les rides avancent et le patin saute d'une ride à l'autre.

Afin de caractériser au mieux le comportement du patin avec la vitesse, on a réitéré cette expérience pour plusieurs vitesses. Les résultats obtenus peuvent être schématisés sur le graphique de la figure 2.3.

Quatre régimes peuvent être distingués selon la vitesse du patin :

1. Comme on l'a vu dans la littérature (Mather [1962]; Taberlet et al. [2007]; Bitbol et al. [2009]) à de faibles vitesses la piste reste stable. Quel que soit le profil initial de la piste, celle-ci finira par être lissée de manière exponentielle.
2. Lorsque l'on augmente la vitesse, un second régime apparaît, la tôle ondulée se forme et la plaque reste toujours en contact avec la piste. Dans ce régime, le système atteint un état stationnaire dans lequel les bosses ont un profil quasi-sinusoïdal avec une amplitude et une longueur d'onde bien définie. Aucun mû-



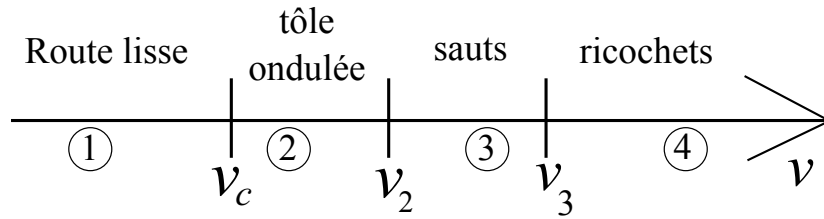


FIGURE 2.3 – **Organisation des quatre régimes observés.** Suivant la vitesse du patin, on observe quatre régimes. Dans le premier, la piste reste lisse et toute perturbation sera lissée. Dans le deuxième cas, l'instabilité de tôle ondulée se développe et le patin reste toujours en contact avec la piste. Dans le troisième régime, l'instabilité apparaît les rides croissent jusqu'à atteindre une amplitude telle que le patin décolle à leur sommet, dans ce régime, le patin n'est plus constamment en contact avec la piste. Pour finir le dernier cas correspond à une instabilité de type ricochet, c'est-à-dire que la plaque rebondi sur la piste dès le premier tour.

risement n'est observé et les rides migrent à contre-sens de la circulation du patin.

3. À des vitesses légèrement supérieures, le patin crée des rides comme dans le régime précédent. Cependant lorsque l'amplitude des rides devient trop importante le patin perd le contact avec la piste et se met à sauter d'une bosse à l'autre. Connaissant l'amplitude des rides, la vitesse délimitant les régimes 2 et 3 peut être calculée. En effet, le patin décolle dès que la courbure de la piste est suffisamment élevée pour que celui-ci ne puisse plus suivre le profil tout en gardant une accélération inférieure à l'accélération de la pesanteur. Ainsi, si l'on suppose que la piste est sinusoïdale alors l'altitude de la plaque peut s'écrire  $y(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}vt\right)$ , alors si  $A\left(\frac{2\pi}{\lambda}v\right)^2 > g$  la plaque perd le contact avec la piste. Dans ce cas, on retrouve les résultats de Taberlet et al. [2007] : le système ne semble pas atteindre de régime stationnaire, il y a un murissement logarithmique des rides et celles-ci avancent dans le sens du passage du patin.
4. Pour finir le dernier cas correspond aux très hautes vitesses, alors les irrégularités de la piste sont suffisantes pour que le patin rebondisse sur la piste dès le premier tour. C'est ce cas qui a été étudié par Hewitt (Hewitt et al. [2011]; Hewitt et Balmforth [2012]) et qu'il a malencontreusement appelé *washboard* alors que ceci est plutôt similaire à des ricochets.

La figure 2.4 montre des diagrammes spatiotemporels obtenus dans chacun de ses régimes.

Comprendre la transition entre le régime 1 et le régime 2 a constitué la plus grosse partie de mon travail sur le sujet. Bien que les régimes 3 et 4 présentent des dynamiques non-linéaires intéressantes, on peut les considérer comme des conséquences et des complications du régime 2 qui est réellement responsable de la tôle ondulée.

Ainsi, nous avons commencé à étudier les propriétés de la vitesse critique  $v_c$  (à l'instar de Bitbol et al. [2009]), séparant les deux régimes route lisse/ondulée. Afin de déterminer cette vitesse, il faut donc pouvoir faire la différence entre une piste lisse et une piste ondulée. Pour cela, il est nécessaire de mesurer l'amplitude des rides, lorsque celle-ci est *grande* (supérieure à un seuil arbitraire), alors la piste est qualifiée d'ondulée,



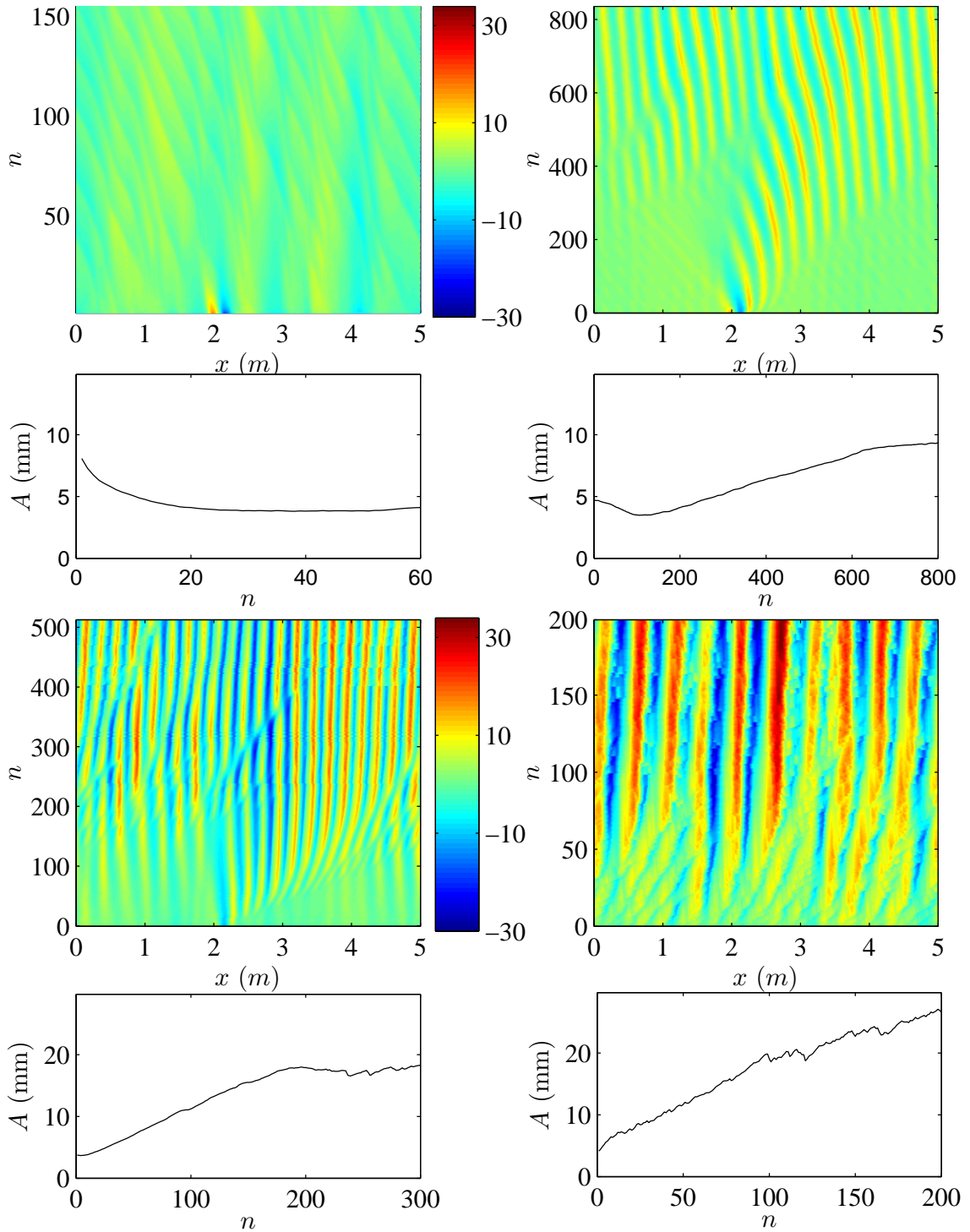


FIGURE 2.4 – Diagrammes spatiotemporels et amplitude des rides dans chacun des quatre régimes. De gauche à droite et de haut en bas, la vitesse du patin vaut :  $v = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $v = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $v = 1.3 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $v = 2.0 \text{ m.s}^{-1}$ .

si l'amplitude des rides est *faible* alors la piste est considérée comme lisse. Bien sûr, il faut que le résultat de ce test ne dépende que faiblement du seuil arbitraire que l'on se fixe. Une façon simple de déterminer l'amplitude des rides pendant un tour consiste à

calculer l'écart type du profil :  $A/\sqrt{2} = \sqrt{(y - \bar{y})^2}$ . Ainsi, si les rides sont uniformément réparties et ont un profil sinusoïdal, leur amplitude sera égale à  $A$ . C'est cette quantité que nous avons utilisée pour faire la distinction entre route lisse et route ondulée.

Afin de déterminer la vitesse critique  $v_c$ , nous avons effectué des rampes de vitesses descendantes à partir d'une vitesse initiale au delà du seuil, mais restant dans le régime 2, c'est-à-dire lorsque la plaque garde toujours le contact avec la piste. La figure 2.5 présente les résultats de deux expériences faites dans les mêmes conditions expérimentales. La rampe de vitesse est identique dans les deux expériences : le patin est tiré à une vitesse initiale de  $1.1 \text{ m.s}^{-1}$  pendant 1000 tours, puis la vitesse diminue de  $0.0125 \text{ m.s}^{-1}$  tous les 2000 tours. Le patin ainsi que sa position n'ont de plus pas été modifiés entre les deux expériences. On constate toutefois que l'amplitude des rides ne chute pas après un même nombre de tours (à partir de 11000 tours pour l'un et 15000 tours pour l'autre), ce qui signifie que la vitesse critique du patin n'a pas été la même dans les deux expériences :  $1.0375 \text{ m.s}^{-1}$  dans un cas et  $1.0125 \text{ m.s}^{-1}$  dans l'autre. Cet écart est faible mais en dehors des barres d'erreurs. Ceci peut alors poser un problème de non-reproductibilité de nos expériences. Cependant, une analyse du profil de la piste permet de se rendre compte que, dans les deux expériences, le système n'est pas dans le même état. Dans un cas, la piste compte 19 rides (soit une longueur d'onde de 26 cm) et dans l'autre 18 (soit une longueur d'onde de 28 cm). On touche ici à un point faible de notre expérience : comme la piste est circulaire le nombre de rides doit être quantifié et il se peut que le système se retrouve frustré dans un état avec une longueur d'onde qui ne serait pas sa longueur d'onde naturelle, c'est-à-dire la plus instable. Ceci justifie donc d'étudier le comportement du patin vis-à-vis de la longueur d'onde des rides présentes sur la piste.

## 2.2 Relation de dispersion

Un des avantages de notre expérience est que l'on peut forcer la longueur d'onde des rides (au moins sur quelques tours) en créant préalablement un motif sur la piste. Ainsi, il est possible de mesurer la relation de dispersion du système. Pour réaliser un profil initial ondulé dans les expériences, nous avons utilisé le patin motorisé et lui avons imposé une trajectoire sinusoïdale. Ainsi, il est possible d'imprimer sur la piste un motif avec une longueur d'onde minimale de 5 cm et une amplitude de 5 mm. Une fois ce profil créé, on laisse le patin libre d'évoluer à la surface de la piste et on mesure l'amplitude des rides à chaque tour à l'aide du télémètre laser. Cette amplitude peut alors croître ou décroître suivant le régime dans lequel on se trouve. La figure 2.6 présente deux exemples d'amplitudes croissante et décroissante. On remarque alors que l'évolution de l'amplitude des rides se fait de manière exponentielle, au moins sur les quelques premiers tours. On peut alors, sur ces premiers tours, définir le taux de croissance exponentielle des rides  $\sigma$  par :  $\sigma = \frac{\log(A)}{n}$ .

Le même protocole a été utilisé dans les simulations numériques. Cependant si l'on ne veut pas que les temps de calculs soit trop longs, on ne peut pas simuler plus de 10000 grains. De plus il paraît déraisonnable d'avoir une piste d'une épaisseur inférieure à une vingtaine de grains. Ceci conduit alors à une longueur de piste de l'ordre de 500 grains. Sachant la longueur d'onde des rides formées numériquement est de l'ordre de

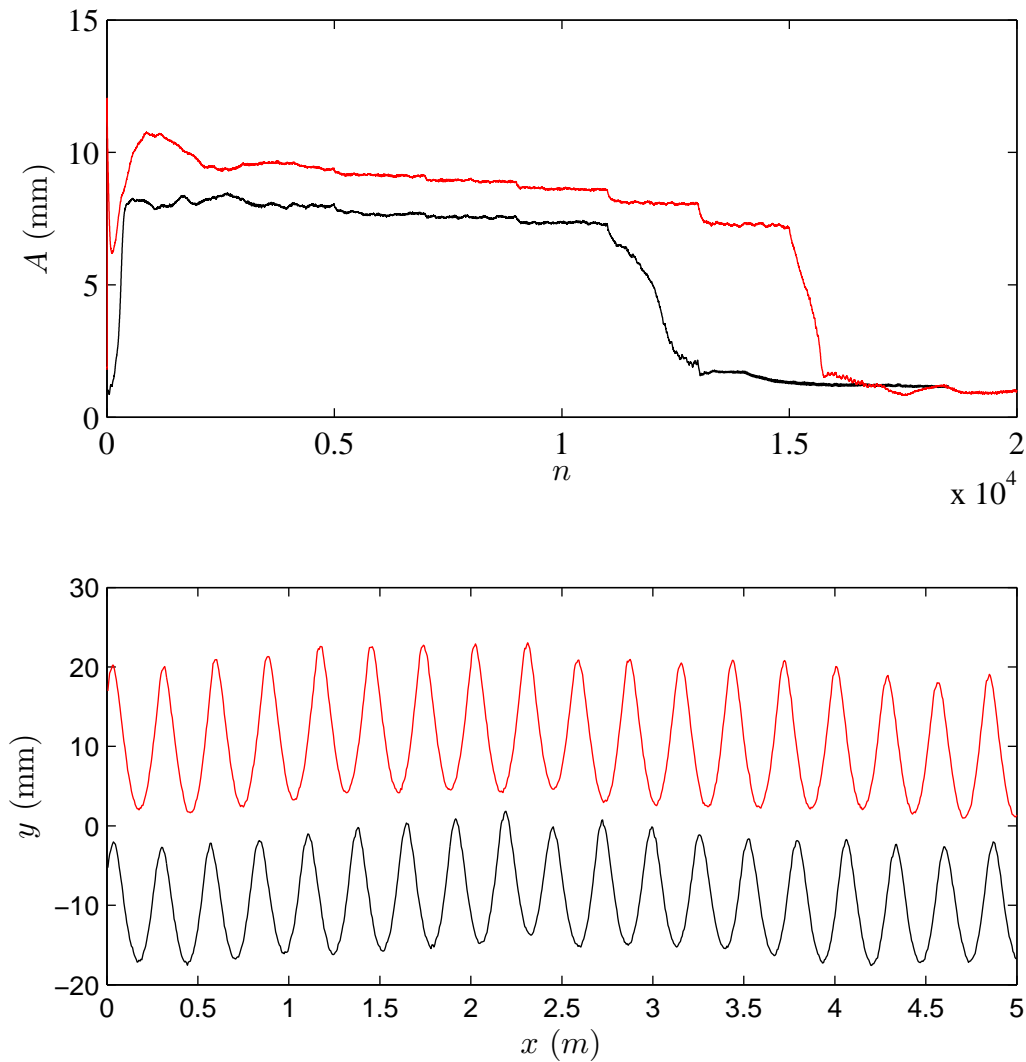


FIGURE 2.5 – a) Évolution de l’amplitude des rides au cours d’une rampe descendante de vitesse pour deux réalisations de la même expérience. b) Profil de la piste dans les deux expériences, on compte 18 rides sur la courbe en rouge et 19 sur celle en noir. On peut aussi constater que les rides ont une allure quasi-sinusoïdale qui justifie le fait que l’on puisse utiliser la déviation standard du profil pour mesurer l’amplitude des rides.

la centaine de grains, on ne peut créer qu’un nombre très limité de rides sur la piste. Les résultats obtenus sont alors très bruités et impossibles à analyser. C’est pourquoi, nous avons utilisé un autre protocole. Deux patins agissent simultanément sur la piste, l’un a une trajectoire sinusoïdale et donc imprime dans la piste un profil ondulé, l’autre est libre de se déplacer verticalement comme dans les simulations traditionnelles de tôle ondulée. Les deux patins évoluent à la même vitesse sur la piste, qui rappelons-le a des conditions aux limites périodiques. Du point de vue du patin libre, tout se passe donc comme s’il évoluait sur une piste sinusoïdale infinie. Il est alors possible de faire passer le patin libre sur un nombre de bosses arbitrairement grand et de longueur

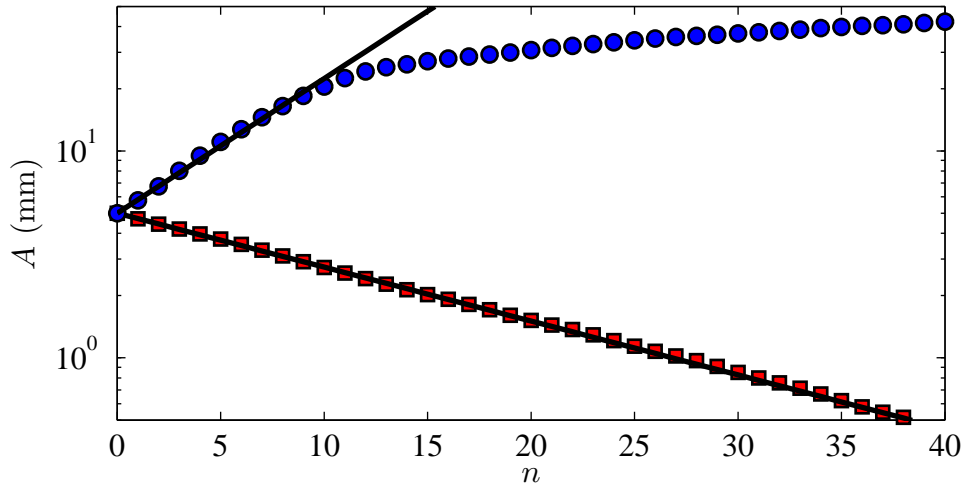


FIGURE 2.6 – **Exemples d'évolutions de l'amplitude des rides en fonction du nombre de tours.** Les ronds bleus représentent une vitesse de  $1.1 \text{ m.s}^{-1}$  et une longueur d'onde  $\lambda = 216 \text{ mm}$ . Pour ces valeurs la piste est instable, l'amplitude des rides croît exponentiellement pendant les dix premiers tours à partir de l'amplitude initial de  $5 \text{ mm}$ . Les carrés rouges symbolisent l'amplitude des rides pour une vitesse de  $0.8 \text{ m.s}^{-1}$  et une longueur d'onde  $\lambda = 273 \text{ mm}$ . Dans ces conditions la piste est stable et l'amplitude des rides (initialement de  $5 \text{ mm}$ ) décroît exponentiellement sur plus de quarante tours.

d'onde quelconque (jusqu'à des tailles de 1000 grains dans les simulations que nous avons effectuées). De plus, il est possible de moyenner les trajectoires des deux patins sur une période (voir figure 2.7). Le seul écueil de ce protocole est que le patin libre ne passe qu'une seule fois sur chaque bosse. Toutefois, sous l'hypothèse que l'évolution des rides est exponentielle comme dans les expériences, le rapport entre les amplitudes du mouvement des deux patins permet d'obtenir le taux de croissance  $\sigma$ . On a alors :  $\sigma = \log\left(\frac{A_{\text{libre}}}{A_{\text{modelant}}}\right)$ , où  $A_{\text{libre}}$  et  $A_{\text{modelant}}$  sont respectivement l'amplitude du patin libre et du patin modelant les rides sur la piste.

La figure 2.8 présente les résultats obtenus dans les expériences et les simulations. Le taux de croissance des rides  $\sigma$  est représenté en fonction de la longueur d'onde et les différentes courbes symbolisent différentes vitesses. On constate sur cette figure que l'allure des courbes expérimentales et numériques est similaire, ce qui nous conforte dans la validité de nos simulations. On observe également que le taux de croissance dépend de la longueur d'onde. Aux faibles vitesses le taux de croissance est toujours négatif. Ainsi, dans ces conditions n'importe quelle perturbation est lissée. À des vitesses élevées, le taux de croissance admet des valeurs positives. La piste est donc instable pour les longueurs d'onde correspondantes. On peut remarquer que la courbe représentant le taux de croissance en fonction de la longueur d'onde est assez plate. Ainsi lorsque que la piste est instable, elle l'est pour toute une plage de longueur d'onde. Ceci explique pourquoi dans les deux expériences discutées précédemment (figure 2.5), on obtient deux longueurs d'onde différentes. Toutes deux sont instables avec des taux de croissance très proches et, sans doute à cause des perturbations initiales, un mode a été plus favorisé que l'autre dans un cas. Puis en diminuant la vitesse, la piste avec

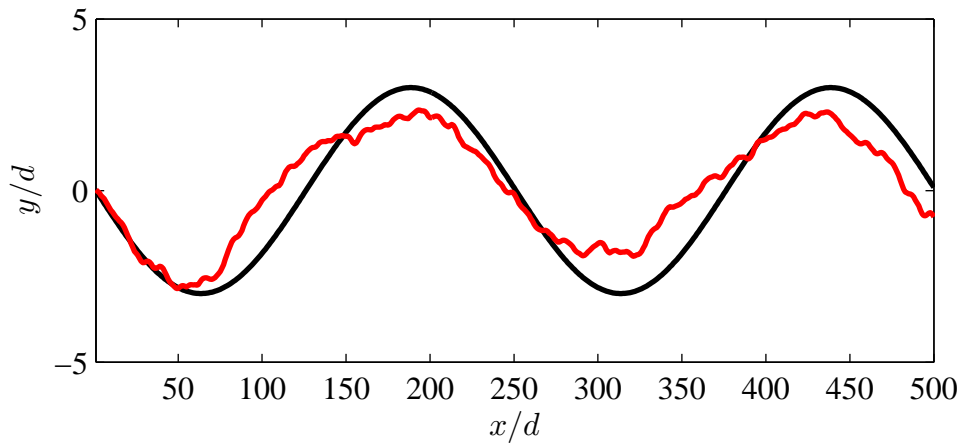


FIGURE 2.7 – **Exemple de trajectoire du patin libre** (en rouge) lorsque celui-ci suit un patin avec une trajectoire sinusoïdale (courbe noire). Dans cet exemple, la longueur d'onde forcée est de  $250 d$  et la vitesse des patins de  $5 \sqrt{gd}$ . On constate que dans ces conditions l'amplitude du patin libre est plus faible que celle du patin modelant la piste. Ceci signifie que pour ces paramètres la piste est stable.

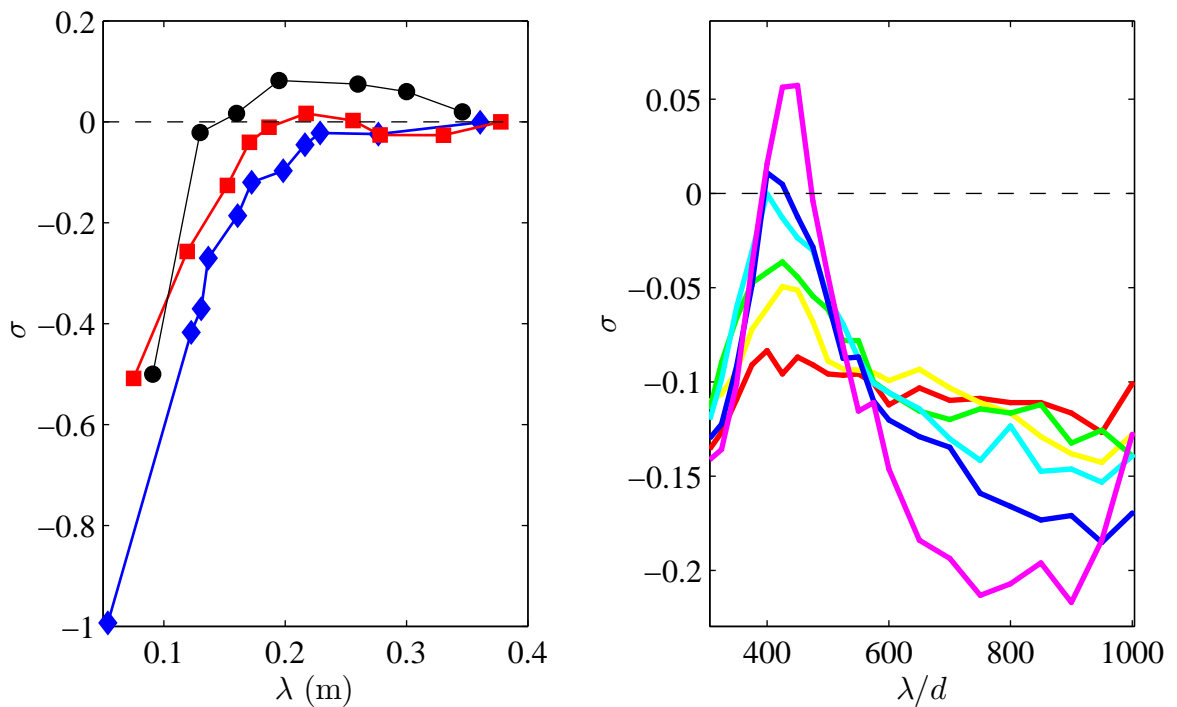


FIGURE 2.8 – **Taux de croissance exponentielle des rides.** a) Taux de croissance exponentielle des rides mesuré dans les expériences en fonction de la longueur d'onde et pour différentes vitesses (ronds noirs :  $v = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$ , carrés rouges :  $v = 0.8 \text{ m.s}^{-1}$ , losanges bleus :  $v = 0.6 \text{ m.s}^{-1}$ ). b) Taux de croissance exponentielle des rides mesuré dans les simulations en fonction de la longueur d'onde et pour différentes vitesses allant de  $3 \sqrt{gd}$  à  $8 \sqrt{gd}$ .

les 19 rides s'est retrouvée frustrée dans cet état qui devient stable en dessous d'une vitesse de  $1.0375 \text{ m.s}^{-1}$  alors qu'avec 18 rides la piste reste instable jusqu'à des vitesses de  $1.0125 \text{ m.s}^{-1}$ . Chaque longueur d'onde possède donc sa propre vitesse critique. Toutefois, on peut définir mathématiquement la vitesse critique  $v_c$  de l'instabilité de tôle ondulée comme étant la vitesse pour laquelle il existe une unique longueur d'onde  $\lambda_c$ , telle que  $\sigma(v_c, \lambda_c) = 0$ .

Jusqu'à présent, on a pu voir que l'instabilité de tôle ondulée séparait deux régimes. Cependant il n'existe encore aucun résultat concernant le type de bifurcation que suit la piste et donc sur l'amplitude de saturation des rides. Dans l'article Bitbol et al. [2009], les auteurs montrent que l'amplitude des rides évolue dans le temps et dépend également de la longueur d'onde. Cependant, il faut rappeler que ces résultats ont été obtenus dans un régime où le patin saute d'une ride à l'autre et ne sont donc pas valables dans ce que nous avons appelé le régime 2. Dans les paragraphes suivants nous nous intéressons donc à l'étude de l'amplitude des rides en fonction de la vitesse du patin.

## 2.3 Type de bifurcation

Afin de déterminer l'amplitude de saturation des rides et donc de connaître un peu mieux le type de bifurcation que suit la piste lorsqu'elle est instable, nous avons réalisé diverses expériences. L'idée la plus simple consiste à partir d'une piste lisse et de laisser tourner la plaque à une certaine vitesse jusqu'à ce que la piste atteigne un état stationnaire. Cependant, comme pour les expériences représentées sur la figure 2.5, il n'est pas certain d'atteindre des états stationnaires avec une même longueur d'onde. Nous avons alors réalisé des rampes de vitesse depuis une vitesse supérieure à la vitesse critique. Ainsi, en partant d'une piste contenant déjà des rides, on contraint le système à rester dans cet état tout au long de l'expérience. Il est également possible de faire une rampe de vitesse croissante. On constate alors une hystérésis assez importante sur la vitesse d'apparition des rides. La figure 2.9 présente le diagramme de bifurcation ainsi obtenu. Les ronds bleus représentent l'amplitude des rides mesurée sur les 100 derniers tours précédant chaque changement de vitesse et ce, pour deux rampes de vitesse successives, l'une croissante et l'autre décroissante. Dans les deux cas la vitesse est incrémentée (ou décrémentée) de  $0.0125 \text{ m.s}^{-1}$  tous les 2000 tours, une telle expérience dure donc une soixantaine d'heures. On constate que la transition ne se produit pas à la même vitesse pour les deux rampes. On observe une hystérésis. Nous avons alors voulu savoir comment se comportait le système à l'intérieur de ce cycle d'hystérésis. Pour cela, nous avons créé des rides avec une amplitude bien définie et avons regardé leur comportement pour des vitesses comprises dans le cycle. Les carrés bleus de la figure 2.9 représentent donc les amplitudes et vitesses pour lesquelles la piste est redevenue lisse, alors que les carrés rouges symbolisent les amplitudes et vitesses qui ont conduit à une croissance des rides. On peut alors tracer la frontière entre les zones stables et instables, celle-ci est symbolisée par les traits noirs de la figure 2.9. Le diagramme de bifurcation ainsi obtenu ressemble fortement au diagramme de bifurcation d'une instabilité fourche sous-critique (Manneville [2004]).

Le résultat obtenu par cette méthode est très stimulant. En effet il existe très peu

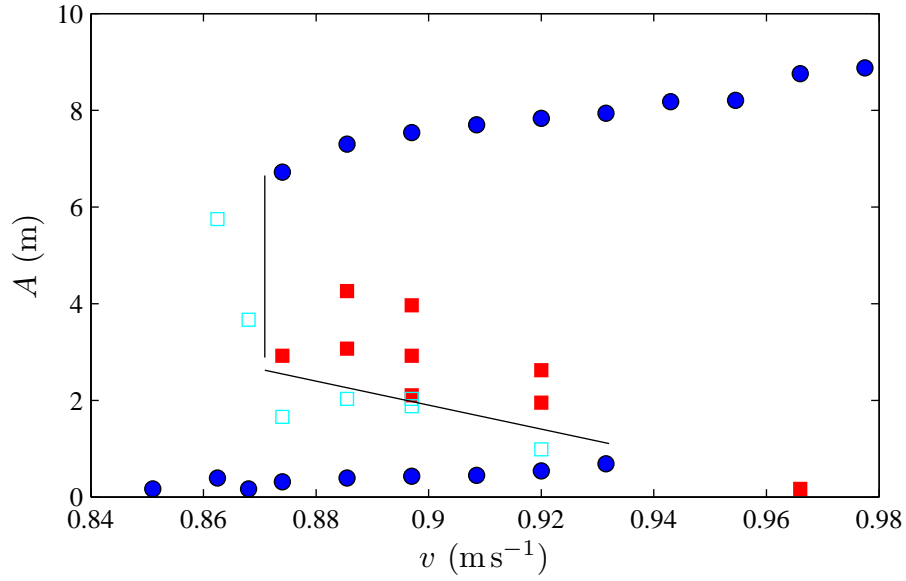


FIGURE 2.9 – **Diagramme de bifurcation obtenu lors de deux rampes de vitesse croissante et décroissante.** Les points bleus correspondent à l’amplitude des rides mesurée sur les 100 tours précédant un changement de vitesse. On observe alors un phénomène d’hystérésis. Les carrés bleus correspondent à des amplitudes de rides et vitesses du patin pour lesquelles la piste est stable, et les carrés rouges pour lesquelles la piste est instable. Les traits noirs délimitent alors deux zones de stabilité et d’instabilité dans le plan  $(A, v)$ .

d’instabilités obéissant à une bifurcation sous-critique. Toutefois, la méthode utilisée est sujette à caution. En effet, lors de la rampe de vitesse, il n’est pas certain que le système ait le temps d’atteindre un régime stationnaire, ce qui pourrait expliquer l’hystérésis. De plus, après avoir réalisé la rampe de vitesse, nous nous sommes aperçus que le patin n’était pas parfaitement tiré selon un axe perpendiculaire au rayon de la piste. Nous avons dès lors réaligné le patin et choisi de réaliser des trempes de vitesse depuis un état contenant des rides. Le protocole suivi étant :

- $N$  tours à une vitesse  $v_{init} > v_c$
- $N$  tours à une vitesse  $v_{init} - \delta v$
- de nouveau  $N$  tours à la vitesse  $v_{init}$
- puis on continue avec une vitesse  $v_{init} - 2\delta v$ .

L’avantage de ce mode opératoire est de partir toujours du même état, celui obtenu à la vitesse  $v_{init}$ , dans lequel le système reste frustré tout au long de l’expérience. De plus, en réalisant des trempes il est possible de mesurer le temps mis par le système pour atteindre son nouveau point d’équilibre. On peut aussi et surtout vérifier que ce point d’équilibre est atteint. La figure 2.10 présente un exemple de trempe et la figure 2.11 présente les résultats obtenus par cette méthode.

On constate qu’avec ce protocole la bifurcation suivi par la piste ressemble à une bifurcation super-critique (Manneville [2004]). L’amplitude des rides évolue en racine de l’écart au seuil pour des vitesses supérieures à la vitesse critique. En fait, la loi de puissance de l’amplitude vis-à-vis de l’écart au seuil dépend fortement de la définition de la vitesse critique. Un moyen de définir celle-ci avec précision est justement de



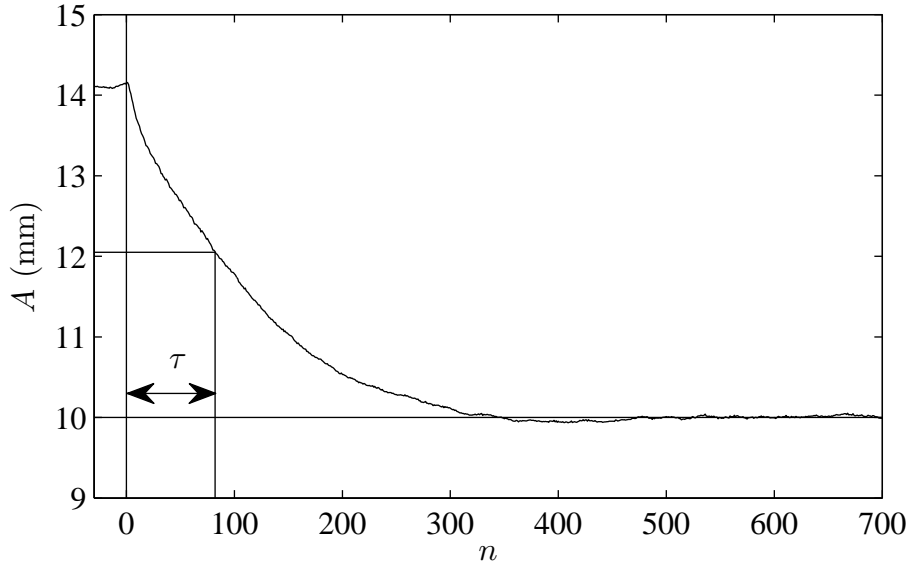


FIGURE 2.10 – **Exemple d'une trempe** depuis une vitesse  $v_{init} = 1.175 \text{ m.s}^{-1}$  vers une vitesse  $v = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$ . L'amplitude des rides évolue jusqu'à atteindre un état stationnaire, on peut alors définir un temps de réponse à 50%  $\tau$ .

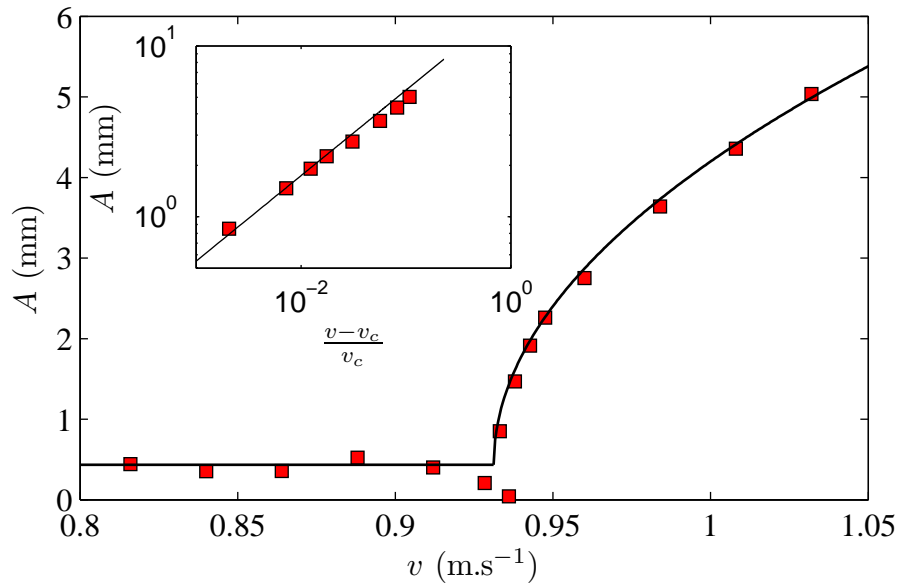


FIGURE 2.11 – **Diagramme de bifurcation obtenu par des trempes de vitesse** depuis une vitesse  $v_{init} > v_c$ . On observe une bifurcation semblable à une bifurcation super-critique, où l'amplitude des rides suit une loi en racine de l'écart au seuil (courbe en trait noir). Le graphe dans l'encadré, correspond à l'amplitude des rides en fonction de l'écart au seuil en échelle logarithmique. Cette amplitude peut être modélisée par une droite de pente 1/2 symbolisée par la courbe en trait noir.

prendre la vitesse pour laquelle on obtient une loi de puissance en racine carrée. La figure 2.12 représente le temps de réponse à 50% du système  $\tau$  (voir figure 2.10) qui est le nombre de tours nécessaire pour que l'amplitude atteigne la moitié de sa valeur finale. On remarque que ce temps de réponse augmente fortement (et semble diverger) à mesure que la vitesse se rapproche du seuil. Ce temps passe d'une dizaine de tours pour les vitesses éloignées du seuil à quasiment cent tours pour les vitesses les plus proches du seuil. De manière plus quantitative, si l'on trace ce temps de réponse en fonction de l'écart au seuil  $\frac{v_c - v}{v_c}$  (encart de la figure 2.11), on s'aperçoit que pour les vitesses inférieures au seuil le temps de réponse suit une loi de puissance de pente -0.5. Ce type de divergence du temps de réponse est également une caractéristique des bifurcations super-critiques comme les transitions de phase du second ordre.

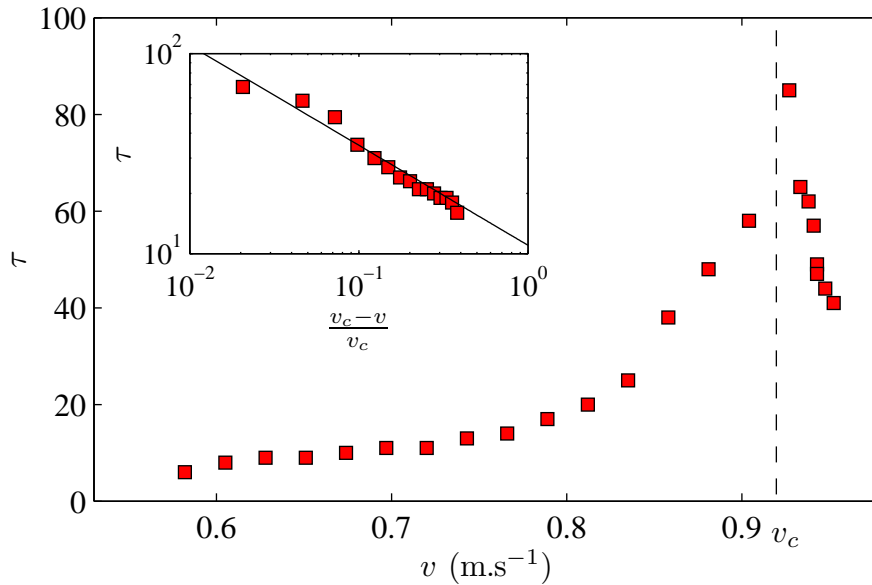


FIGURE 2.12 – **Temps de réponse à 50% en fonction de la vitesse du patin.** On observe que celui-ci augmente à mesure que l'on se rapproche de la vitesse critique. Le graphe dans l'encadré représente  $\tau$  en fonction de l'écart au seuil (pour des vitesses inférieures à la vitesse critique) en échelle logarithmique. On observe que  $\tau$  obéit à une loi de puissance en  $(v_c - v)^{-\frac{1}{2}}$ .

Concernant le phénomène d'hystérésis, nous avons réalisé des expériences de trempe en partant d'une vitesse nulle. Nous avons alors observé que si l'on brasse le sable de la piste entre chaque mesure et qu'on la lisse en passant un patin à altitude constante, l'hystérésis disparaissait. Le brassage du sable permet d'une part d'effacer le motif de ride en profondeur et d'autre part de décompacter légèrement le lit de grains. Ainsi, si le patin effectue de nombreuses rotations sur la piste (typiquement plus d'une centaine) à une vitesse inférieure à la vitesse critique, alors le lit de sable se compacte légèrement et se lisse presque parfaitement. Si bien que lorsque l'on impose une vitesse supérieure au seuil la piste reste dans un état métastable.

L'amplitude des rides en fonction de la vitesse a également été mesurée dans les simulations numériques. Pour cela, nous avons réalisé une simulation pour chaque vitesse. Partant d'un même état initial, dans lequel le patin est à quelques diamètres de

grains au dessus de la piste on impose une vitesse horizontale  $v$  au patin. Après typiquement une trentaine de tours l'amplitude des rides sature. La figure 2.13 présente alors l'amplitude finale des rides en fonction de la vitesse du patin. Nous avons vérifié que la longueur d'onde des rides était la même entre chaque simulation. Même si les données sont un peu plus bruitées que dans les expériences, il est possible de modéliser l'amplitude des rides par une loi en racine carrée comme précédemment.

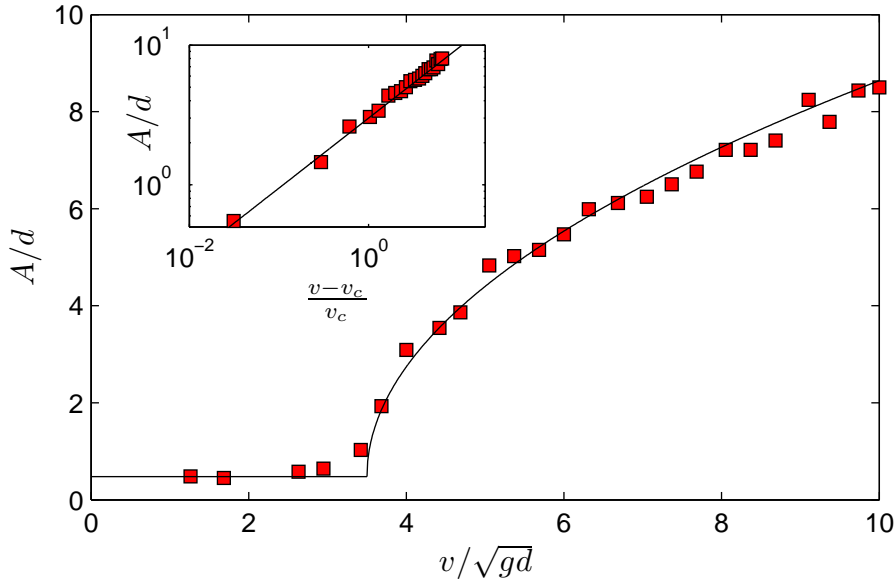


FIGURE 2.13 – **Diagramme de bifurcation dans les simulations numériques.** On observe ici aussi une bifurcation semblable à une bifurcation super-critique. Le graphe dans l'encadré, correspond à l'amplitude des rides en fonction de l'écart au seuil en échelle logarithmique, cette amplitude peut être modélisée par une droite de pente 1/2 symbolisée par la courbe en trait noir.

Finalement, nous avons utilisé deux méthodes expérimentales différentes pour mesurer l'amplitude des rides dans un état stationnaire et il semblerait que le résultat dépende du protocole suivi. Cependant, nous sommes convaincus que l'utilisation de trempes de vitesse est la bonne méthode pour sonder le type de bifurcation que suit le système. De plus les simulations numériques ont fourni le même résultat que les trempes de vitesse. Nous pouvons conclure que l'instabilité de tôle suit une bifurcation fourche super-critique. Il s'agit donc un phénomène à rapprocher des transitions de phase du second ordre.

## 2.4 Conclusion

Il est tout d'abord important de retenir que ces expériences et simulations de tôle ondulée nous ont permis de retrouver les résultats établis dans la littérature. De façon plus importante, pour la première fois, nous avons établi qu'il existait plusieurs régimes de tôle ondulée. Bien que le régime 3, dans lequel les voitures sautent d'une bosse à l'autre, soit celui que l'on observe sur les routes, c'est le régime 2 qui est le plus

intéressant. En effet, dans ce régime la piste se déforme alors que le véhicule est toujours en contact avec elle. Tous les ingrédients physiques de l'instabilité se trouvent donc déjà dans le régime 2, sans toutes les complications qu'implique la non-linéarité du saut de la voiture. De plus, nous avons mesuré expérimentalement et numériquement pour la première fois le taux de croissance des rides. Ces mesures nous ont permis d'interpréter certains phénomènes lors de l'apparition de la tôle ondulée (plusieurs longueurs d'onde possibles et vitesse critique différente selon la longueur d'onde). Également pour la première fois, nous avons mesuré la courbe de bifurcation de l'instabilité de tôle ondulée. Grâce à cette courbe, nous pouvons supposer que l'instabilité suit une bifurcation de type fourche super-critique. De plus, nous avons mis en évidence que le temps nécessaire au système pour atteindre un état stationnaire divergeait (ou au moins augmentait fortement) au voisinage du point critique, ce qui est là aussi une signature d'une bifurcation super-critique ou d'une transition de phase du second ordre.

Toutes ces observations nous permettent de mieux cerner l'instabilité ou tout du moins ses propriétés. Cependant ceci n'explique pas les mécanismes physiques responsables de la formation de ces rides. La suite de cette partie présente un modèle de stabilité linéaire reproduisant fidèlement les observations que nous avons faites.



# Chapitre 3

## Mesures de forces en régime stationnaire

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>82</b>
<b>3.2</b>	<b>État stationnaire</b>	<b>82</b>
3.2.1	Phénomène d'hystérésis et oscillations	83
3.2.2	Mesure de la masse de sable transportée	86
<b>3.3</b>	<b>Mesure des forces</b>	<b>88</b>
3.3.1	Spectre de fréquence des forces	88
3.3.2	Influence de la vitesse	89
3.3.3	Influence de l'angle d'attaque	92
<b>3.4</b>	<b>Loi de frottement effectif</b>	<b>93</b>
<b>3.5</b>	<b>Énergie dissipée</b>	<b>94</b>
3.5.1	Conclusion des mesures de force en régime stationnaire	95
<b>3.6</b>	<b>Premier modèle</b>	<b>96</b>
3.6.1	Mise en équation	96
3.6.2	Jerk equation	98

---

### 3.1 Introduction

Tous les modèles d'usure ondulatoire des rails font intervenir deux mécanismes couplés, l'un étant lié à la dynamique du système et l'autre à la déformation des rails. Comme nous l'avons vu dans l'état de l'art, c'est la dynamique des rails ou de la roue des trains qui fixe la longueur d'onde du motif. Donc, si l'on fait une analogie avec l'instabilité de tôle ondulée, c'est la dynamique de la plaque qui est responsable de la longueur d'onde des rides. Or cette dynamique s'écrit très simplement dans le cas que nous étudions ici :

$$m\ddot{y} = f_l - mg \quad (3.1)$$

où  $m$  est la masse de la plaque et  $f_l$  la force de portance (*lift force*) agissant sur la plaque. Ainsi, la dynamique de la plaque est uniquement contenue dans l'expression de cette force de portance. C'est pourquoi nous avons voulu mesurer cette force.

La mesure de forces agissant sur un objet au contact d'un milieu granulaire est un sujet très actif. On peut par exemple citer les travaux de Wieghardt [1975]; Chehata et al. [2003]; Costantino et al. [2011a]; Ding et al. [2011]; C. R. Wassgren et Karion [2003]; Peng et al. [2009]; Guillard et al. [2013]. Pour la plupart de ces travaux, les forces sont mesurées sur des objets totalement immergés dans un milieu granulaire sec. Récemment Seguin et al. (Seguin et al. [2009, 2011]) ont mesuré la force qu'il fallait exercer sur un objet pour le faire pénétrer dans du sable, dans le but d'expliquer la distance de pénétration d'un impacteur (un météore par exemple) dans un milieu granulaire. Ils observent que cette force est simplement proportionnelle à l'enfoncement de l'objet. Des écarts à cette loi linéaire sont toutefois observés du fait de la présence des parois contenant le sable (Costantino et al. [2008]). Récemment Ding et al. [2011] ont pu mettre en évidence un couplage entre force de portance et force de trainée sur un objet totalement immergé et tiré dans un milieu granulaire. Ils observent aussi que ces deux forces sont indépendantes de la vitesse de l'objet. En 2011 Gravish et al. [2010] et en 2012 Guo et al. [2012] ont étudié la force de trainée agissant sur une plaque verticale poussant un monticule de sable. Gravish et al. se sont intéressés à des régimes de basses vitesses (quelques centimètres par seconde, contre  $1 \text{ m.s}^{-1}$  dans nos expériences) dans lesquels ils observent des phénomènes intermittents de stick slip et également une forte corrélation entre la force de trainée et la force de portance, tandis que Guo et al. ont mesuré la force de portance agissant sur une plaque verticale lorsqu'elle accumule du sable. Ils en déduisent une généralisation des lois de Coulomb.

Après cette courte revue bibliographique, on peut constater qu'il n'existe aucune expérience destinée à mesurer la force ressentie par une plaque inclinée charriant du sable à des vitesses de l'ordre du mètre par seconde. Nous avons alors utilisé le patin destiné à lisser la piste pour faire cette étude.

### 3.2 État stationnaire

Nous avons voulu mesurer les forces qui s'exercent sur un patin incliné qui charrie du sable en faisant varier les paramètres suivant : la vitesse du patin, sa profondeur et son inclinaison. Nous avons donc commencé par enfoncer le patin incliné à  $45^\circ$  dans le



sable et à charrier du sable à une vitesse et une profondeur constantes. Les résultats qui suivent ont été obtenus après un état transitoire correspondant généralement au premier tour de piste. Cette première expérience extrêmement simple a déjà révélé quelques phénomènes non triviaux d'hystérésis et d'oscillations.

### 3.2.1 Phénomène d'hystérésis et oscillations

On s'est aperçu expérimentalement que lorsque l'on charrie du sable, les forces de traînée et de portance oscillent avec une période d'une cinquantaine de tours et une amplitude proche de 100%. Cette modulation qui n'est pas observée dans les simulations n'est pas due à un problème d'acquisition car on observe effectivement que la quantité de sable charriée fluctue avec la même période et évolue fortement (typiquement entre environ 10 mL et 1 L). Jusqu'à présent nous n'avons aucune interprétation ou explication de ce phénomène. Nos expériences de mesures de forces ont alors été réalisées sur un petit nombre de tours afin de limiter l'influence de ces oscillations.

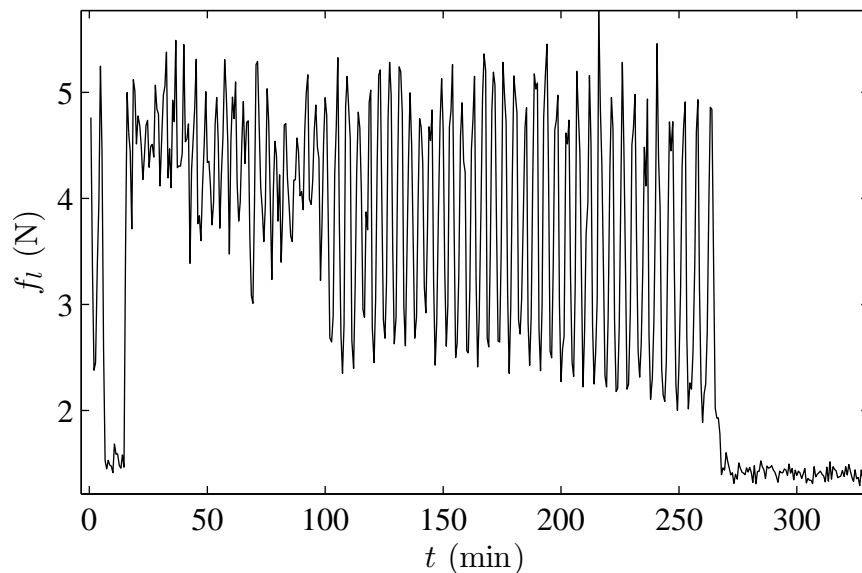


FIGURE 3.1 – **Force de traînée mesurée lors d'une expérience où la plaque charrie du sable à altitude constante et sur un lit plat.** L'expérience commence réellement au bout de vingt minutes (pendant ces vingt premières minutes le patin initialement rempli de sable s'est vidé et nous l'avons alors redescendu). On constate alors que la force de portance oscille autour d'une valeur moyenne avec une période d'environ 270 secondes soit une cinquantaine de tours. Ces oscillations prennent tellement d'ampleur que le patin fini par se vider complètement au bout de 6 heures d'expériences.

Un phénomène d'hystérésis qui intervient cette fois dans les simulations et dans les expériences est également observé. En effet, initialement on impose au patin une altitude telle qu'il ne transporte pas de sable, puis on le descend progressivement, typiquement de 50  $\mu\text{m}$  tous les 3 tours dans l'expérience et de 0,1 diamètre de grain tous les 5 tours dans les simulations. Lorsque le patin commence à racler du sable de façon permanente pendant un tour, on note son altitude. Puis on le remonte à la même

vitesse verticale de  $50 \mu\text{m}$  tous les 3 tours ou de  $0,1$  diamètre de grain tous les 5 tours. On remarque alors qu'il faut remonter d'environ  $300 \mu\text{m}$  dans l'expérience et d'un diamètre de grain dans les simulations pour redéposer tout le sable. Lorsque l'on trace la force subie par le patin en fonction de son altitude, on trouve un cycle d'hystérésis dont la largeur est de l'ordre du diamètre des grains (voir figure 3.2). Afin de vérifier que ceci n'était pas une simple coïncidence, nous avons remplacé le sable de l'expérience par des graines de colza d'un diamètre de  $2 \text{ mm}$ . Nous avons utilisé ces graines car elles sont assez rondes, monodisperses et économiquement plus avantageuses que  $50 \text{ kg}$  de billes de verre tamisées.

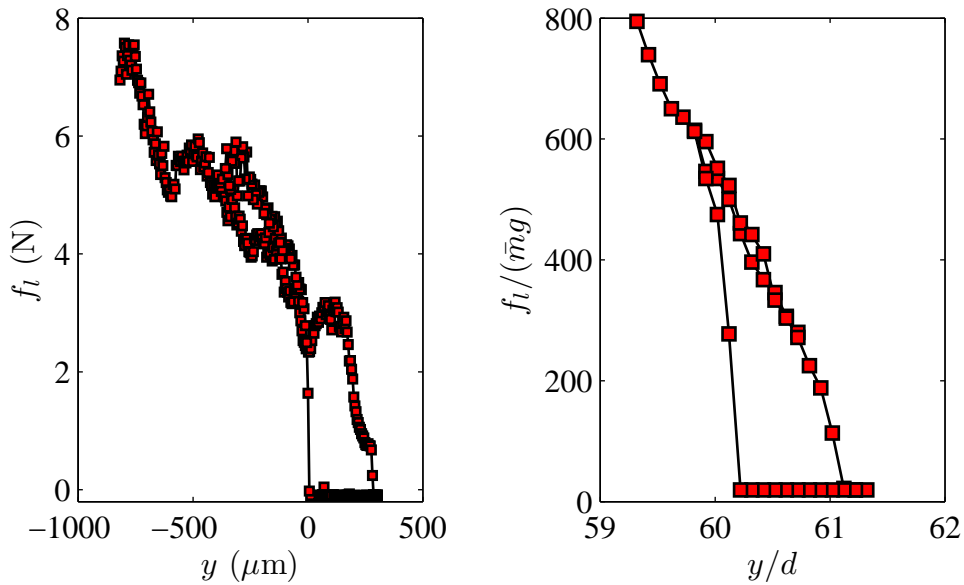


FIGURE 3.2 – Courbes d'hystérésis obtenues expérimentalement (à gauche) et numériquement (à droite) lorsque l'on descend puis remonte le patin. On constate qu'il faut remonter le patin d'une hauteur d'un diamètre de grain au dessus du niveau de la piste pour qu'il perde tout le sable qu'il a accumulé.

Avec les graines de colza, nous avons également trouvé que la largeur du cycle était de l'ordre d'un diamètre de grain (donc de  $2 \text{ mm}$  ici). Toutefois cette largeur dépend de la vitesse du patin à la fois dans les expériences et dans les simulations. Nous avons étudié cette dépendance dans les simulations. La figure 3.3 présente la largeur du cycle en fonction de la vitesse du patin. Nous pouvons remarquer que la largeur du cycle est une fonction croissante de la vitesse et qu'elle tend vers 1 à haute vitesse.

Nous avons alors cherché l'origine de ce cycle. Celui-ci pourrait par exemple provenir d'une compaction du lit granulaire. On peut aussi penser à un effet de bord dû au sable s'échappant par les côtés du patin. Cette dernière hypothèse a vite été invalidée car dans les simulations en deux dimensions on observe aussi une hystérésis. Celui-ci ne peut donc pas venir des bords. Concernant l'hypothèse de la compaction, nous avons mesuré la hauteur du lit de sable au cours d'un cycle de descente puis montée du patin. Si en déposant uniformément le sable charrié par le patin, on observe une augmentation de la hauteur de la piste correspondant au volume de ce sable c'est qu'il n'y a pas de compaction. Nous avons réalisé cette expérience au début de ma thèse alors que nous ne

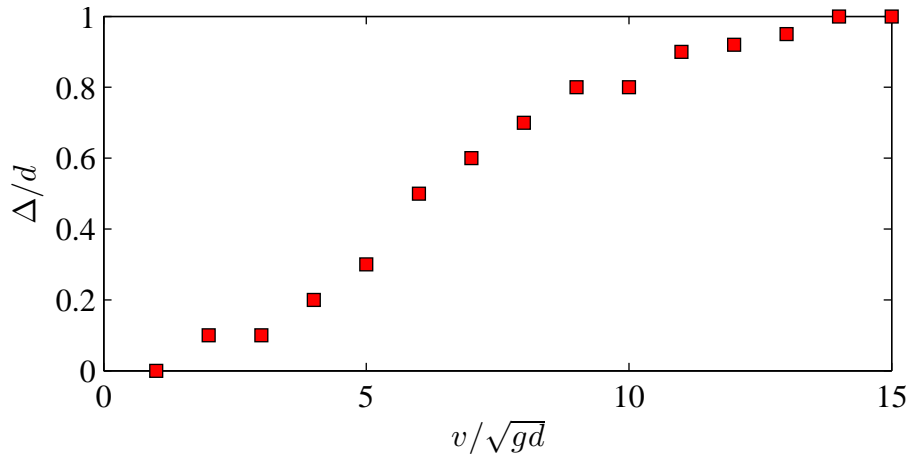


FIGURE 3.3 – Largeur du cycle d’hystérésis mesurée dans les simulations numériques en fonction de la vitesse du patin. Cette largeur augmente avec la vitesse et tend vers 1 à haute vitesse.

dispositions pas encore de télémètre laser. Nous avons dû utiliser un autre moyen pour mesurer la hauteur de la piste. Pour cela, un faisceau laser est envoyé en incidence rasante sur la piste et une caméra CCD, installée à la verticale du spot laser, le filme au cours du temps. On a obtenu sa position en traçant son profil d’intensité et en l’approximant par une parabole (voir figure 3.4). Initialement, le patin a une altitude suffisante pour ne pas transporter de sable. On le descend ensuite, jusqu’à transporter une quantité de sable raisonnable. On observe alors un déplacement de la tache laser d’une distance  $d = 8.5$  mm. Connaissant l’angle d’incidence du faisceau ( $\beta = 2.7^\circ$ ), on peut calculer la diminution de hauteur du lit de sable :  $h = d \arctan \beta = 400 \mu\text{m}$ . Si ces  $400 \mu\text{m}$  ont été prélevés uniformément sur la piste, alors ils correspondent à un volume de sable de 300 mL. Or, une fois l’expérience terminée, on a prélevé le sable transporté par le patin. Celui-ci contenait justement environ 300 mL de sable. Cette mesure est assez peu précise car elle nécessite de prélever exactement tout le sable charrié et suppose également que la compacité du sable n’évolue pas. On peut tout de même conclure que le sable présent dans le chasse-neige est prélevé uniformément sur la piste et que celle-ci n’est pas sujette à compaction.

Nous avons alors interprété le phénomène d’hystérésis comme étant un phénomène dynamique dû aux collisions des grains sous le patin que l’on peut associer à la dilatance de Reynolds. Plus la vitesse est élevée et plus les grains s’empêchent mutuellement de passer sous le patin.

De ce qui précède on peut conclure qu’il n’est pas judicieux de mesurer les forces de trainée et de portance en fonction de l’altitude du chasse-neige à cause du phénomène d’hystérésis. La grandeur pertinente dans ce cas est la quantité de sable transportée. Dans le paragraphe suivant nous présentons les moyens mis en oeuvre pour mesurer cette masse.

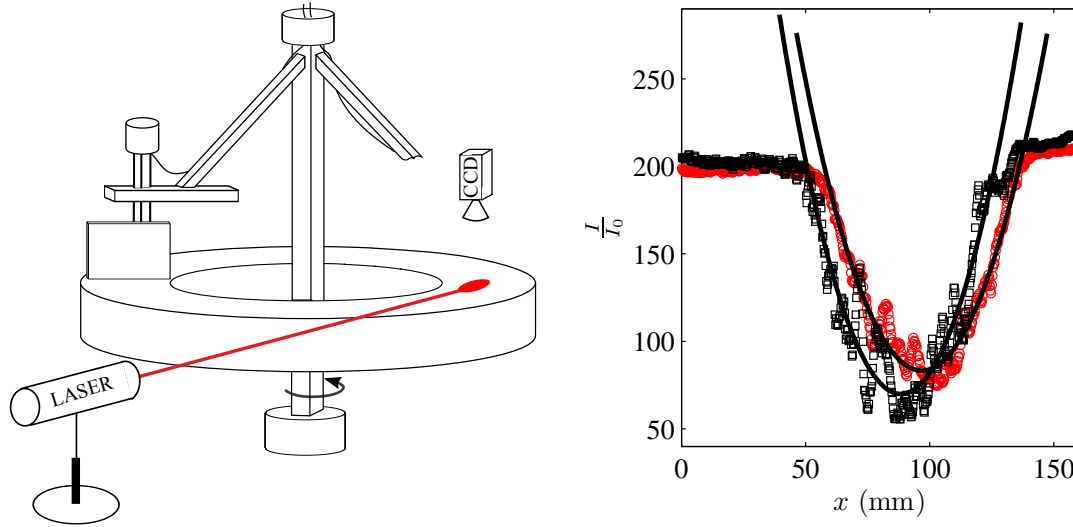


FIGURE 3.4 – À gauche, le schéma de l'expérience permettant de mesurer la hauteur du lit granulaire. À droite, profils d'intensité du spot laser lorsque le patin (en noir) est plein et lorsqu'il est vide (en rouge). Une approximation parabolique (courbes en traits pleins) permet de mesurer la position de la tâche laser et donc de connaître la hauteur de la piste.

### 3.2.2 Mesure de la masse de sable transportée

Dans l'expérience, nous avons commencé par mesurer la quantité de sable transporté en utilisant une nappe laser en incidence oblique sur celui-ci. Pour cela, nous avons remplacé le patin en PVC par un patin transparent en plexiglas. Une caméra embarquée sur le bras et fixée à la verticale du patin prend des photos toutes les  $1/25$  s du profil résultant de l'intersection entre la nappe laser et le sable transporté (voir la figure 3.5). Ce profil a l'allure d'un triangle dont les sommets sont repérés grâce à un traitement d'image sur le logiciel IMAGEJ. Sachant que la nappe laser est inclinée à  $45^\circ$  il est possible de calculer le volume puis la masse de sable transporté avec une précision d'environ 5%. Grâce au profil laser nous avons pu constater que le sable transporté avait l'allure d'un prisme à base triangulaire et que l'angle d'avalanche du sable était constant quelle que soit la vitesse et l'inclinaison du patin. Cependant, cette méthode est assez longue et fastidieuse à mettre en place. Il faut synchroniser l'acquisition vidéo et l'acquisition de la force, le traitement vidéo est assez long et dépend de l'éclairage du profil. C'est pour ces raisons que nous nous sommes procurés un télémètre laser que nous avons installé dans le prolongement du patin comme indiqué sur la figure 3.6. Le télémètre permet d'obtenir une des longueurs (notée  $l$ ) du triangle formée par les grains entraînés par le patin avec une précision de  $200 \mu\text{m}$ . On peut alors calculer la masse de sable charrié grâce à la formule suivante :

$$M = L \rho \phi \frac{1}{2} l^2 \sin^2 \alpha \left( \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \theta} \right), \quad (3.2)$$

où  $L$  est la largeur du patin ( $L=14.5$  cm),  $\alpha$  l'inclinaison du patin,  $\theta$  l'angle d'avalanche du tas de sable transporté ( $\theta = 35^\circ$ ), et  $\rho$  la masse volumique des grains ( $\rho = 2400 \text{ kg.m}^{-3}$ ). La compacité  $\phi$  du sable a été mesurée en prélevant un volume de

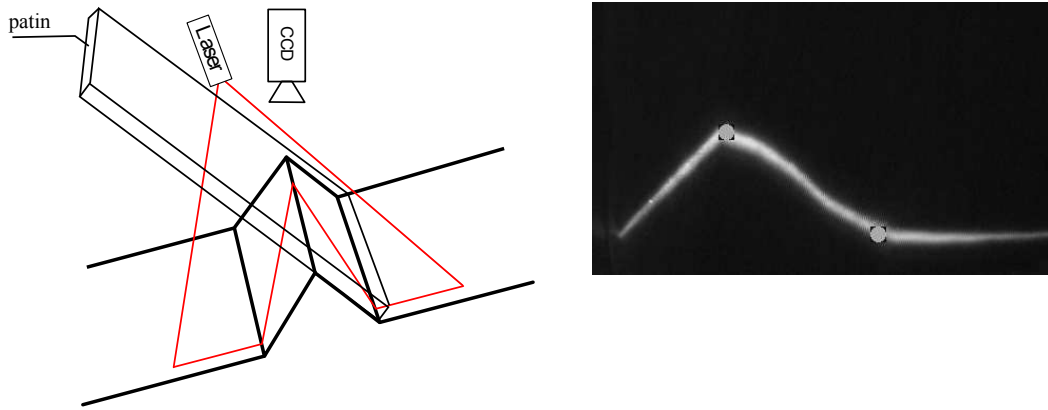


FIGURE 3.5 – À gauche, illustration du principe de la mesure de la masse de sable transporté à l'aide d'une nappe laser en incidence oblique. À droite, profil résultant de l'intersection de la nappe laser avec le sable transporté. Les deux points gris sont repérés par analyse d'images et grâce à leur position on peut évaluer le volume transporté.

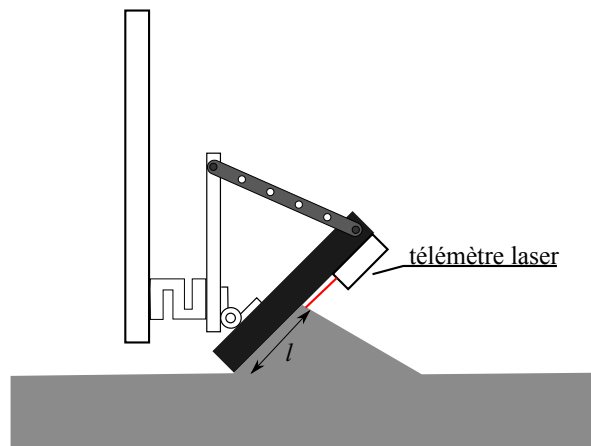


FIGURE 3.6 – Croquis du patin fixe avec le télémètre. Le télémètre laser est installé dans le prolongement du patin et permet de mesurer la longueur  $l$ .

500 mL de sable dans un b cher que nous avons ensuite rempli d'eau jusqu'à ce que le niveau d'eau atteigne le niveau du sable, nous avons alors mesuré  $\phi = 0.55$ . Grâce au télémètre laser, il est possible de faire des acquisitions à plus haute fréquence qu'avec la caméra (typiquement 500 Hz), et sa synchronisation avec la mesure des forces de portance et de traînée est immédiate car leur acquisition est faite via la même carte. Nous avons vérifié que les deux méthodes donnaient les mêmes résultats et donc pour des raisons de commodité nous avons travaillé avec le télémètre laser.

Dans les simulations numériques, trois méthodes sont utilisées pour mesurer la masse de sable charrié (voir figure 3.7). La première consiste à compter le nombre de grains dont l'altitude est supérieure à l'altitude du lit de grain, définie comme l'altitude du patin. La seconde méthode est identique à celle utilisée expérimentalement : on mesure la distance  $l$  et grâce à l'angle d'avalanche des grains on calcule la masse  $M$ . La dernière méthode repose sur la mesure de la quantité de mouvement totale du système

$Q$  :

$$Q = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i}{\bar{m} v}, \quad (3.3)$$

où  $v_i$  est la vitesse du grain  $i$  et  $\bar{m}$  la masse moyenne des grains ( $\bar{m} = 1$ ).  $Q$  est alors une estimation du nombre de grains se déplaçant à la vitesse  $v$ . Aucune différence notable entre ces trois mesures de la masse de sable n'a été remarquée. Dans la suite, les résultats seront donnés grâce à la seconde méthode.

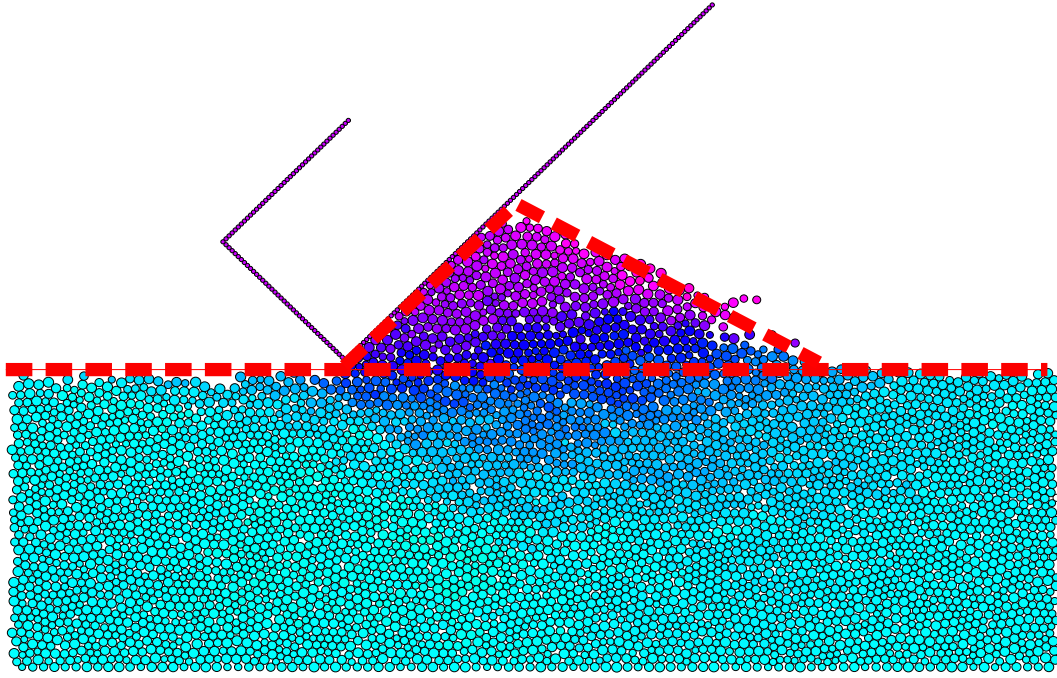


FIGURE 3.7 – **Image du patin dans les simulations numériques**, les traits en pointillés délimitent le sable transporté. Pour connaître la masse des grains charriés, on peut soit compter le nombre de grains présents dans le triangle en pointillés, soit calculer l'aire de ce triangle soit encore calculer la quantité de mouvement totale du système. La couleur des grains correspond à leur vitesse (bleu ciel : vitesse nulle, violet : vitesse du patin).

### 3.3 Mesure des forces

#### 3.3.1 Spectre de fréquence des forces

Le premier résultat que nous avons obtenu dans l'étude des forces de portance et de traînée est qu'aucune fréquence caractéristique n'est observée dans les signaux de force délivrés par les capteurs ou mesurés dans les simulations. Ce premier résultat est non trivial et très important, car on aurait pu s'imaginer que l'instabilité de tôle ondulée soit due à une série de remplissage et vidange du patin comme le présente Mather (Mather [1963]). Cependant la figure 3.8 représentant la transformée de Fourier de la force de portance dans les expériences et les simulations ne montre aucun pic caractéristique, contrairement à l'étude de Gravish et al. (Gravish et al. [2010]) faite à plus basse vitesse

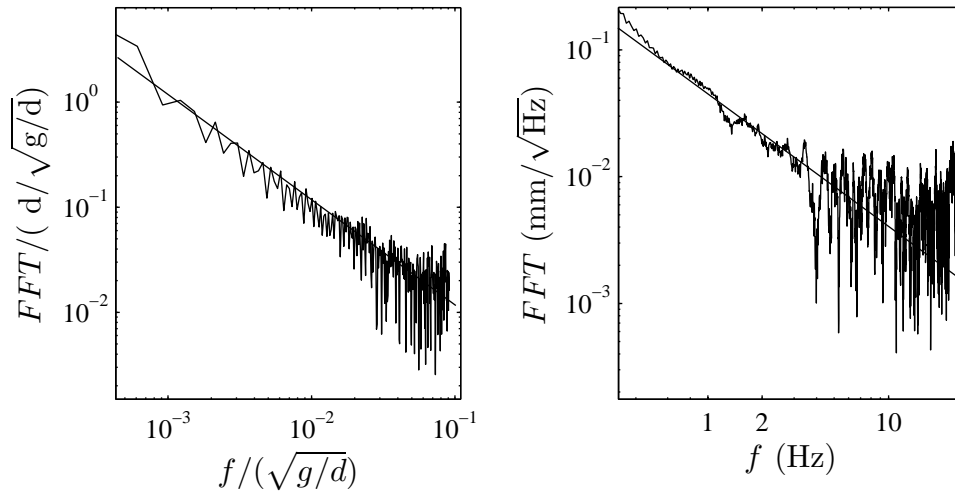


FIGURE 3.8 – **Transformée de Fourier de la force de portance dans les expériences (à droite) et les simulations (à gauche).** Aucune fréquence caractéristique n’apparaît dans ces spectres où l’on observe un bruit rose en  $1/f$ .

et faisant intervenir un phénomène de stick-slip. La transformée de Fourier semble suivre une loi de puissance avec une pente d’environ -1, caractéristique d’un bruit rose. Ceci confirme l’impression que l’on a lorsque l’on observe le patin charrier du sable : l’écoulement des grains semble continu et ne fait pas apparaître d’avalanches successives qui auraient pu être responsables de l’instabilité. Dans la suite, nous nous intéressons à la dépendance des forces vis à vis de la vitesse du patin lorsque celui-ci est incliné de  $45^\circ$ .

### 3.3.2 Influence de la vitesse

Afin de déterminer l’influence de la vitesse du patin sur les forces de traînée et de portance, nous nous sommes donné le protocole suivant : initialement, le patin est au dessus de la piste et on le descend jusqu’à charrier environ 1 kg de sable. On laisse ensuite le système évoluer pendant 5 tours puis après ce processus d’initialisation, on commence à enregistrer les données. L’altitude du patin est remontée d’environ  $10 \mu\text{m}$  toutes les 2 secondes, il se vide alors petit à petit jusqu’à ne plus transporter de sable, on arrête alors l’acquisition. Nous avons essayé de remonter le patin 5 fois plus vite et 5 fois plus lentement et aucune différence n’est observée, si bien que l’on peut supposer que la mesure de force est faite dans un état quasi-stationnaire.

Numériquement, on effectue une simulation pour chaque altitude et vitesse du patin. On commence alors les simulations avec le patin au dessus de la piste et se déplaçant horizontalement à la vitesse  $v$ , puis on le descend jusqu’à l’altitude souhaitée. Le système évolue jusqu’à atteindre un état stationnaire (généralement en un tour) dans lequel on effectue les mesures de la masse et des forces de portance et de traînée.

Expérimentalement et numériquement, les forces de portance et de traînée dépendent de la vitesse du patin. Plus le patin va vite et plus les forces sont importantes. Les figures 3.9a) et 3.9c) présentent la force de portance agissant sur la plaque



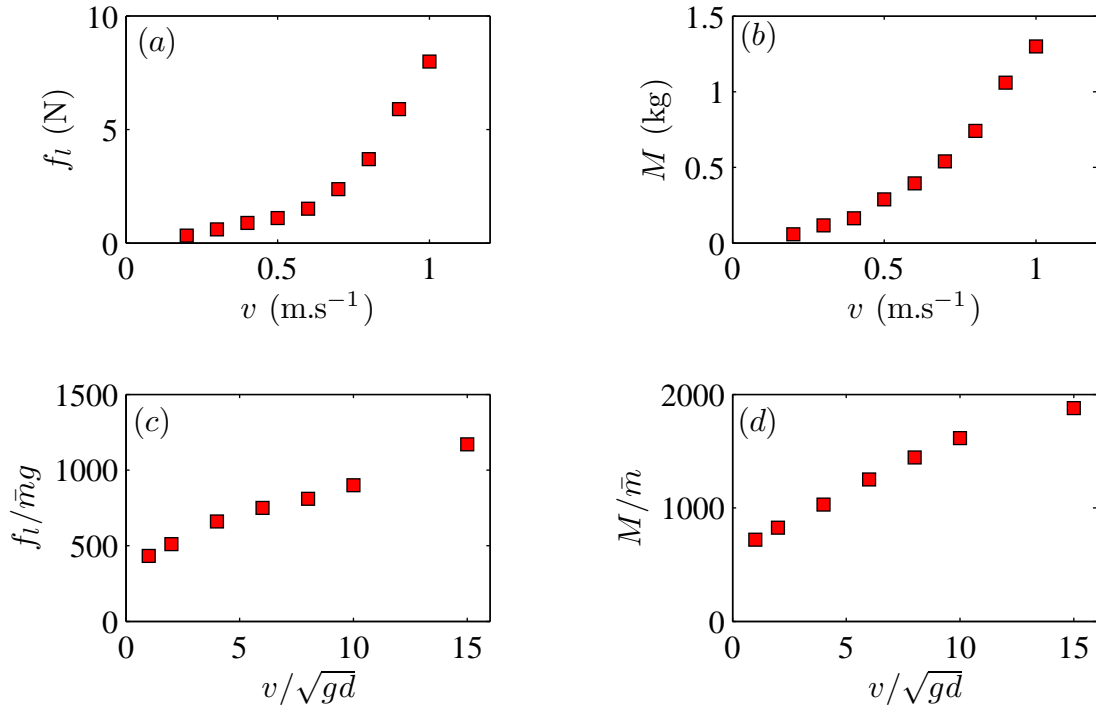


FIGURE 3.9 – (a,c), Évolution de la force de portance agissant une plaque évoluant à altitude constante sur un lit plat en fonction de sa vitesse horizontale (respectivement dans les expériences et les simulations). (b,d), Évolution de la masse que transporte le patin dans les mêmes conditions. À la fois  $f_l$  et  $M$  augmentent avec la vitesse du patin (respectivement dans les expériences et les simulations).

maintenue à altitude constante en fonction de la vitesse (expérimentalement et numériquement). Cependant, comme on peut le voir sur les figures 3.9b) et 3.9d), la masse de sable transporté augmente elle aussi avec la vitesse. Ceci est due à la dilatance de Reynolds qui était aussi responsable du cycle d’hystérésis discuté précédemment. À haute vitesse le patin va en quelque sorte chercher des grains plus profondément dans le lit qu’à basse vitesse. Il est important de noter que la compacité du sable transporté est affectée par la vitesse uniquement sous le patin et non dans le volume total.

Dès lors, si l’on trace les forces de portance et de traînée en fonction de la masse de sable transporté (voir figure 3.10), on obtient une seule et même droite quelle que soit la vitesse. Ainsi, dans un état stationnaire, portance et traînée sont fonctions uniquement de la masse de sable transporté. Ce résultat est assez surprenant car comme on le verra sur la figure 3.13a) le sable transporté possède un écoulement semblable à celui d’un fluide. On aurait alors pu imaginer obtenir une dépendance linéaire ou quadratique des forces vis-à-vis de la vitesse comme pour des écoulements de fluides laminaires ou turbulents.

Bien souvent, les forces mesurées sur un intrus dans un milieu montrent une faible, voire aucune dépendance avec la vitesse (Wieghardt [1975]; Stone et al. [2004]; Seguin et al. [2011]; Costantino et al. [2008]). La notion de masse transportée n’est d’ailleurs sûrement pas pertinente dans ces études. Dans nos expériences, les forces de portance et de

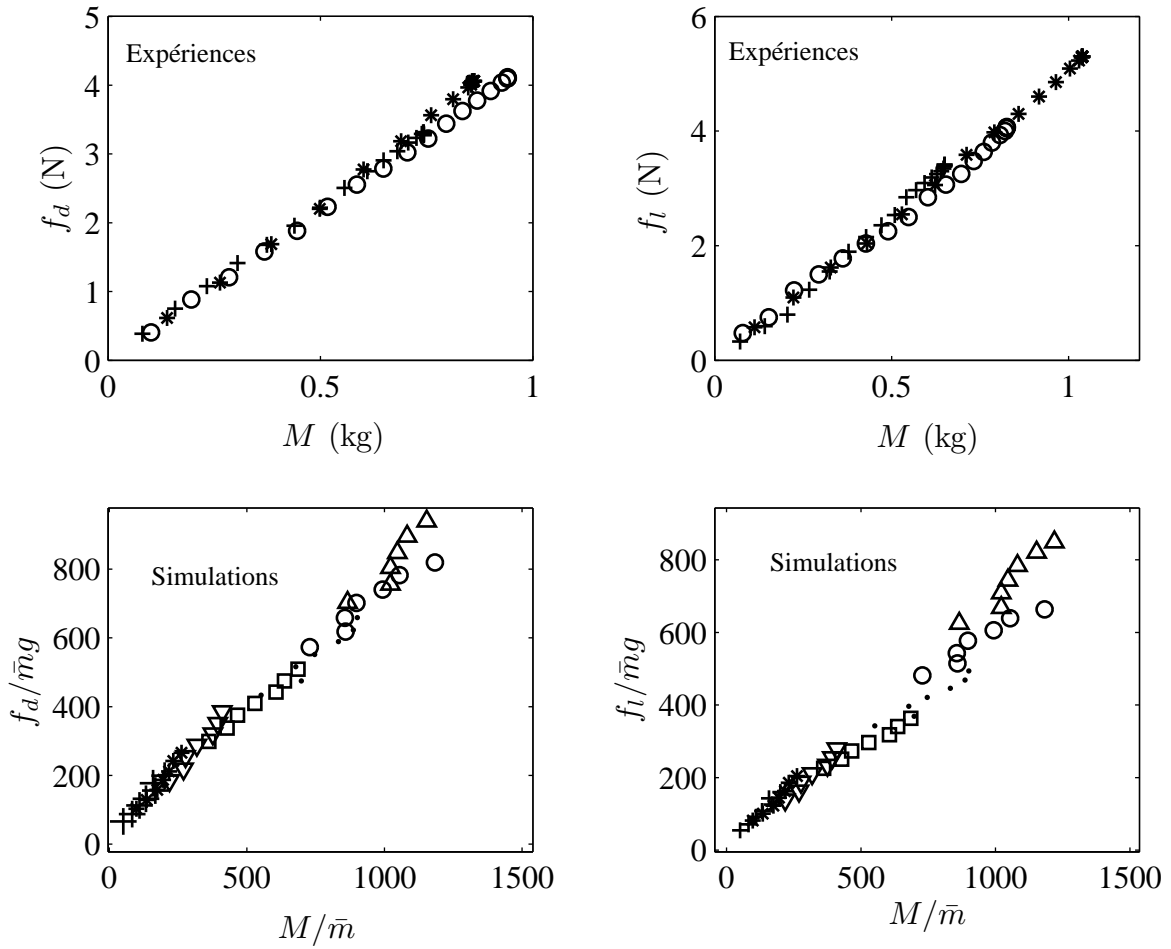


FIGURE 3.10 – Force de portance ( $f_l$ ) et de traînée ( $f_d$ ) agissant sur la plaque en fonction de la masse de sable transportée  $M$  pour différentes vitesses et une inclinaison du patin de  $45^\circ$ . Dans les expériences, les symboles correspondent à : +  $v=0.1 \text{ m.s}^{-1}$ , \*  $v=0.5 \text{ m.s}^{-1}$  et o  $v=1 \text{ m.s}^{-1}$ . Dans les simulations, les symboles correspondent à : +  $v=2 \sqrt{gd}$ ,  $\nabla$   $v=3 \sqrt{gd}$ ,  $\square$   $v=4 \sqrt{gd}$ ,  $\cdot$   $v=5 \sqrt{gd}$ ,  $\circ$   $v=6 \sqrt{gd}$  et  $\triangle$   $v=7 \sqrt{gd}$ .

traînée dépendent de la vitesse mais uniquement via la masse de sable de transporté, en effet, à masse transportée constante, les forces de portance et de traînée ne dépendent pas de la vitesse. Bien sûr, si l'on va beaucoup plus vite (au-delà de  $3 \text{ m.s}^{-1}$  dans les expériences et  $15 \sqrt{gd}$  dans les simulations), le lit de grains commence à se diluer fortement et le comportement décrit plus haut n'est plus observé. Cependant, ces vitesses ne sont jamais atteintes dans les expériences de tôle ondulée qui nous intéressent. Ainsi, dans une plage de vitesse raisonnable on peut écrire que dans un état stationnaire :

$$\begin{cases} f_d = \mu_d M g \\ f_l = \mu_l M g \end{cases} \quad (3.4)$$

Les coefficients  $\mu_d$  et  $\mu_l$  s'apparentent à des coefficients de frottement solide et sont indépendants de la vitesse du patin. Leur dépendance vis à vis de l'inclinaison  $\alpha$  est discutée dans le paragraphe suivant.

### 3.3.3 Influence de l'angle d'attaque

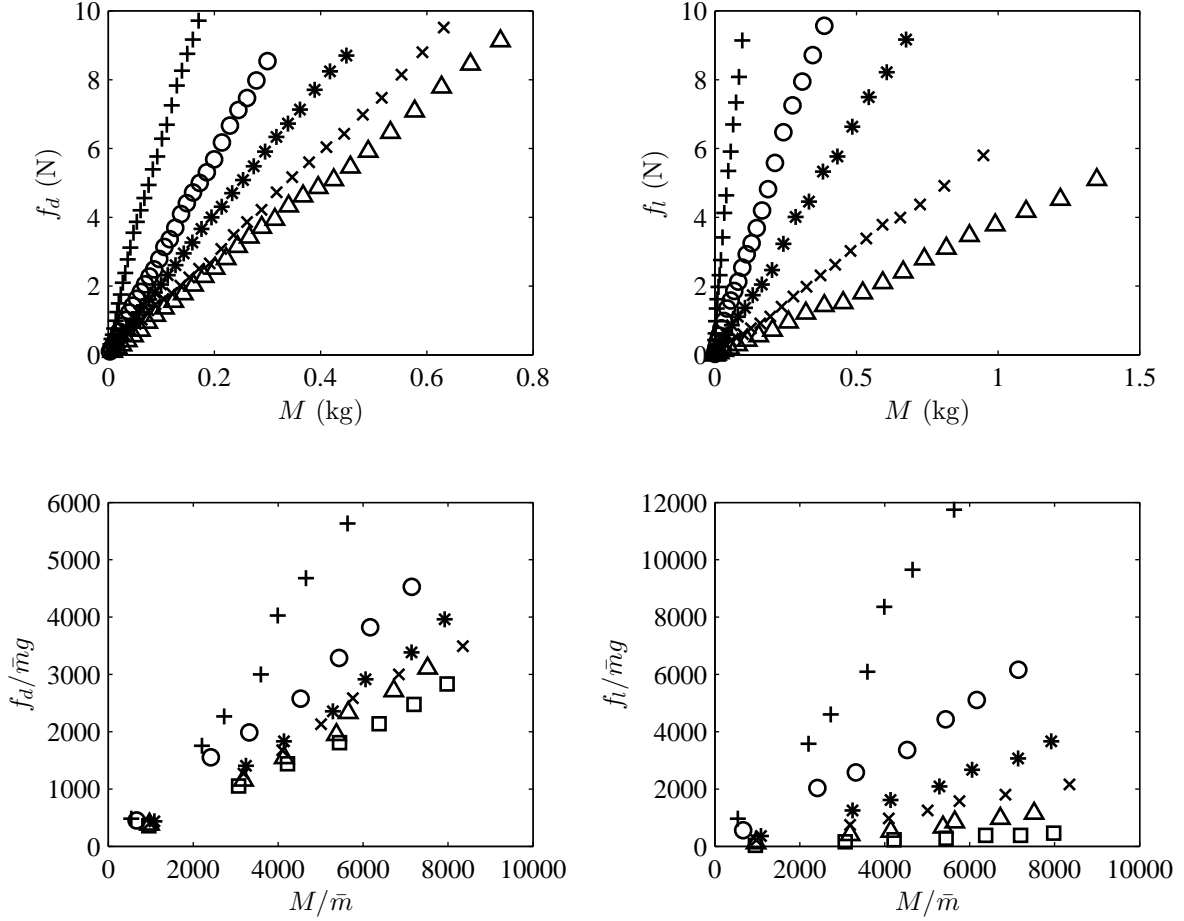


FIGURE 3.11 – Forces de portance et de traînée en fonction de la masse de sable transporté pour différentes inclinaisons du patin. Les symboles correspondent à + :  $\alpha=15^\circ$ ,  $\circ$  :  $\alpha=30^\circ$ , \* :  $\alpha=45^\circ$ ,  $\times$  :  $\alpha=60^\circ$ ,  $\triangle$  :  $\alpha=75^\circ$ ,  $\square$  :  $\alpha=90^\circ$  (dans les simulations uniquement).

Nous avons effectué des expériences et des simulations similaires à celles présentées plus haut mais avec des angles d'attaque du patin différents (de  $15^\circ$  à  $75^\circ$  dans les expériences et jusqu'à  $90^\circ$  dans les simulations). Pour chaque angle, nous avons étudié trois vitesses ( $0.2$ ,  $0.5$  et  $1.0 \text{ ms}^{-1}$  dans les expériences et  $2$ ,  $4$  et  $7 \sqrt{gd}$  dans les simulations). Comme précédemment, nous avons trouvé que les forces ne dépendent que de la masse de sable transporté. La figure 3.11 représente portance et traînée en fonction de la masse pour les différents angles. Chaque courbe de la figure 3.11 a été moyennée sur les trois vitesses effectuées. Comme on peut s'y attendre, la force de portance diminue à mesure que l'on augmente l'inclinaison de la plaque. Elle ne tombe toutefois pas à 0 lorsqu'elle est inclinée à  $90^\circ$  à cause de l'épaisseur finie du patin. Ainsi, les coefficients  $\mu_d$  et  $\mu_l$  sont des fonctions de l'angle  $\alpha$ . Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'il est possible de combiner ces coefficients pour obtenir un comportement général indépendant de l'inclinaison du patin.

### 3.4 Loi de frottement effectif

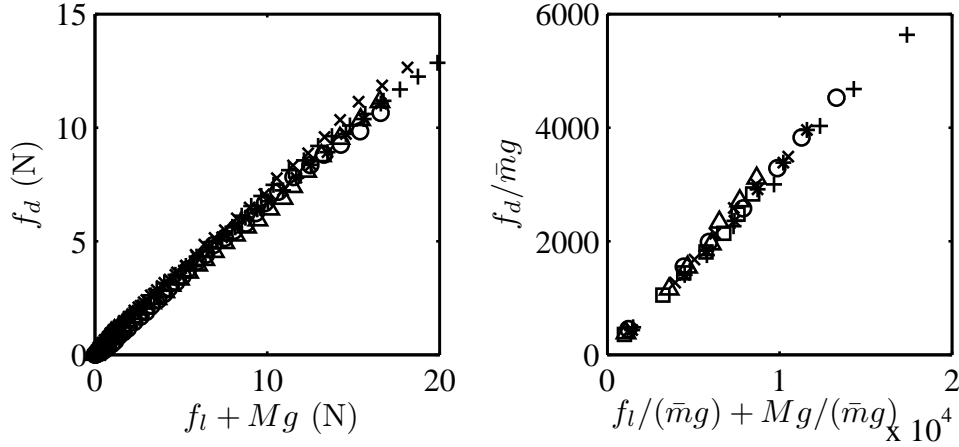


FIGURE 3.12 – **Force de traînée en fonction de la somme de la force de portance et du poids des grains transportés.** Les données se rassemblent sur une seule et même droite pour toutes les vitesses et inclinaisons du patin. On peut alors définir un coefficient de frottement effectif.

Il est possible de trouver une loi générale reliant la force de portance et la force de traînée. En effet, si l'on fait un bilan des forces agissant sur la masse de sable transporté, on compte : son poids, la traînée, la portance et la réaction du lit de grain. Or comme les mesures ont été faites dans un régime stationnaire, l'équilibre des forces verticales et horizontales est vérifié. Ainsi, la composante horizontale de la réaction du lit de sable sur les grains transportés est l'opposée de la traînée et sa composante verticale est l'opposée de la somme de la portance et du poids des grains transportés. Si l'on trace ces deux composantes l'une en fonction de l'autre, c'est-à-dire si l'on trace  $f_d$  en fonction de la somme  $f_l + Mg$ , on obtient une seule et même droite quelles que soient la vitesse et l'inclinaison du patin (figure 3.12). Ceci signifie que le sable transporté peut être assimilé à un bloc glissant en frottant sur un plan avec un coefficient de frottement  $\mu_{eff}$ . Le coefficient  $\mu_{eff}$  est *a priori* une fonction de l'angle  $\alpha$  mais comme le montre la figure 3.12 celui-ci est constant et est lié à  $\mu_d$  et  $\mu_l$  par :

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_d(\alpha)}{1 + \mu_l(\alpha)}. \quad (3.5)$$

Jusqu'à présent les résultats fournis ont été obtenus à la fois dans les expériences et dans les simulations. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, grâce aux simulations numériques il est possible d'avoir accès à des grandeurs physiques que l'on ne peut pas mesurer expérimentalement. Le paragraphe suivant présente quelques caractéristiques mesurées numériquement au sein des grains transportés. Nous nous intéressons notamment à la puissance dissipée  $P_d$  par le système, celle-ci étant liée à la vitesse et à la force de traînée via la relation :  $P_d = -f_d v$ .

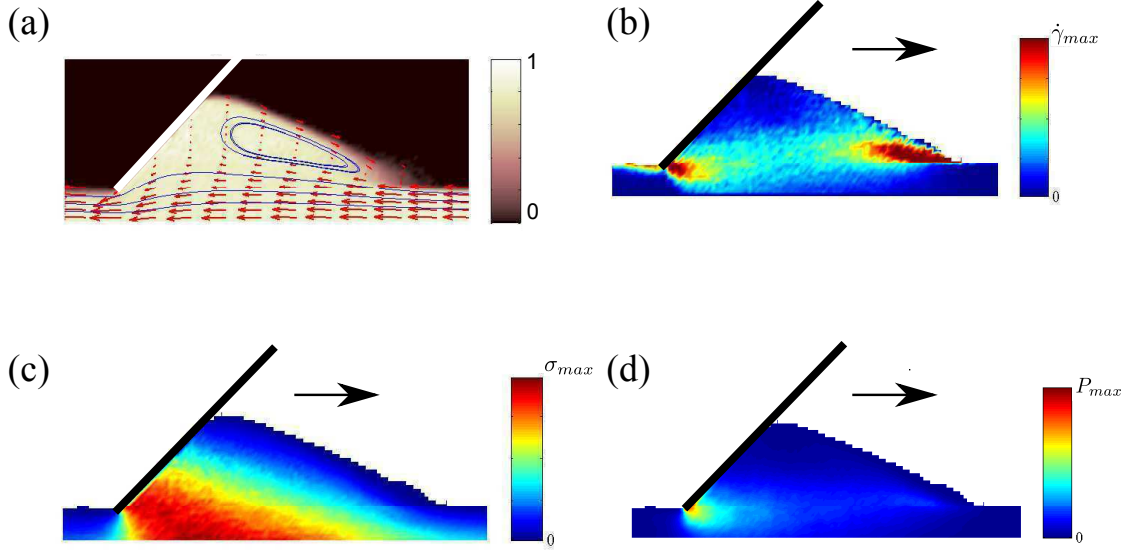


FIGURE 3.13 – Représentation de différents champs au sein du sable charrié par le patin dans les simulations (vitesse du patin :  $5 \sqrt{gd}$ ). Sur la figure (a) nous avons représenté la compacité du lit granulaire (en couleur) et le mouvement moyen des grains. Les flèches montrent le champ de vitesse dans le référentiel lié au patin, et les lignes représentent les lignes de courant de l'écoulement des grains. La figure (b) montre le champ de taux de cisaillement et la figure (c) le champ de pression. Pour finir, sur la vue (d) on peut observer une carte de la dissipation d'énergie dans le système.

### 3.5 Énergie dissipée

La figure 3.13 présente quatre vues issues des simulations numériques. Sur la première (figure 3.13a)) on a représenté les lignes de courant des grains calculées dans le référentiel lié au patin. On constate tout d'abord l'existence d'un vortex de recirculation. Les grains près de la surface libre vont plus vite que la plaque alors que ceux proches du lit de sable vont moins vite. De plus, on constate que la vitesse des grains le long du patin est quasi nulle. La couleur sur cette vue représente la compacité : on constate alors que, comme nous l'avions supposé, la compacité  $\phi$  est constante. On remarque que les grains transportés glissent sur le lit de grains créant alors une bande de cisaillement bien définie. Cette bande est bien visible sur la figure 3.13b) où est représenté le taux de cisaillement local du milieu granulaire. Le long de cette bande, on observe deux points chauds de plus fort taux de cisaillement. Le premier est proche de l'extrémité du patin et le second correspond au point de chute des grains avalanchant le long de la surface libre. L'épaisseur de cette bande de cisaillement est de l'ordre d'une douzaine de grains quelle que soit la vitesse et est symétrique par rapport à l'axe horizontal passant par l'extrémité du patin. Par contre, plus la vitesse augmente et moins cette bande de cisaillement contient de grains, le défaut de grain se retrouvant dans la masse de sable transportée. Ceci explique alors pourquoi la masse de sable transporté augmente avec la vitesse. La figure 3.13c) est une carte de la contrainte locale : on

observe que la pression n'est pas hydrostatique et qu'elle est maximale au voisinage de l'extrémité du patin. La combinaison du taux de cisaillement et de la pression permet de comprendre la localisation de la dissipation d'énergie dans le système, symbolisée sur la figure 3.13d). On constate que la majeure partie de l'énergie est dissipée juste sous le bord du patin, là où la pression et le cisaillement sont tout deux maximaux.

La dissipation d'énergie permet également d'éclairer un peu l'origine physique de la force de traînée. En effet, si l'on note  $E$  l'énergie mécanique totale du système, alors un bilan d'énergie donne :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + P_d + P_i, \quad (3.6)$$

où  $E_p$  et  $E_c$  sont respectivement les énergies potentielle et cinétique des grains,  $P_d$  est la puissance dissipée et  $P_i$  la puissance injectée par l'opérateur. Comme les simulations sont faites en régime stationnaire, alors  $\frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = \frac{dE_p}{dt} = 0$ . De plus, la puissance injectée par l'opérateur est simplement l'opposée de la puissance de la force de traînée :  $P_i = -f_d v$ . Nous avons alors vérifié qu'en sommant la puissance dissipée par chaque grain et en divisant cette puissance par la vitesse du patin, on obtient bien la même valeur pour la force de traînée que celle mesurée directement. Ce test nous permet de vérifier que dans le code numérique l'incrément de temps  $dt$  n'est pas trop grand et qu'ainsi, lorsque l'on intègre les équations du mouvement on n'injecte pas d'énergie dans le système. La dissipation d'énergie provient de deux phénomènes : le frottement (contrôlé par le coefficient de frottement  $\mu$ ) et l'inélasticité des grains (paramétrée par le coefficient de restitution  $e$ ). On peut alors écrire :  $P_d = P_d^e + P_d^\mu$ . Il est possible de mesurer la puissance dissipée par chacun de ces processus et la figure 3.14 représente la fraction de puissance dissipée par frottement par rapport à la dissipation totale. On constate sur cette figure que pour des coefficients de frottement suffisamment grands ( $\mu > 0.2$ ) près de 80% de la dissipation est d'origine frictionnelle et ce même pour des restitutions aussi faibles que 1/2. On remarque également que si l'on garde les paramètres  $\mu$  et  $e$  des simulations dans des plages raisonnables ( $0.2 < \mu < 1$  et  $0.5 < e < 0.9$ ) la répartition de la puissance dissipée reste pratiquement inchangée et donc le comportement physique du système reste le même. Ceci prouve une fois de plus la robustesse des simulations numériques de dynamique moléculaire.

### 3.5.1 Conclusion des mesures de force en régime stationnaire

Dans cette section, nous avons montré que l'écoulement des grains transportés par le patin est continu. Il est donc inutile de chercher une explication à la tôle ondulée dans un phénomène oscillant interne au sable transporté (comme un phénomène de stick-slip ou d'accumulation puis décharge de sable). Nous avons mis en évidence que la force de portance agissant sur la plaque était simplement reliée à la masse de sable transporté via la relation  $f_l = \mu_l Mg$ , où la constante de friction effective  $\mu_l$  ne dépend que de l'angle d'inclinaison du patin. De plus, grâce aux simulations numériques nous avons pu avoir une vision détaillée des grains mis en mouvement par le patin. Nous avons mis en évidence une bande de cisaillement et calculé le champ de pression qui tous deux combinés expliquent la localisation de la dissipation d'énergie dans le système. L'expression trouvée de la force de portance va servir dans la suite comme base d'un

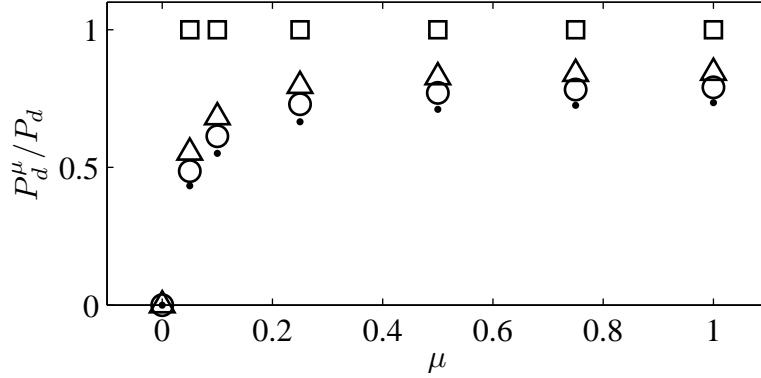


FIGURE 3.14 – Fraction d’énergie dissipée par frottement ( $\frac{P_d^\mu}{P_d}$ ) en fonction du coefficient de friction  $\mu$  et pour différents coefficients de restitution des collisions  $e$  ( $\square e = 1, \triangle e = 0.9, \circ e = 0.8, \cdot e = 0.5$ ). On remarque que, hormis pour des valeurs extrêmes de  $\mu$  et  $e$ , le rapport  $\frac{P_d^\mu}{P_d}$  est sensiblement le même pour toutes les simulations. Ceci montre que les simulations ne dépendent pas de manière cruciale du choix des paramètres que l’on impose.

modèle de stabilité linéaire.

## 3.6 Premier modèle

Les mesures de forces effectuées précédemment permettent de lever un peu le voile sur la dynamique du patin lorsqu’il charrie du sable sur la piste. Il devient possible de remplacer l’expression de la force de portance dans le principe fondamental de la dynamique par une première expression littérale. Ceci est l’objet de ce paragraphe.

### 3.6.1 Mise en équation

En remplaçant la force de portance  $f_l$  par son expression en fonction de la masse de sable transportée dans le principe fondamental de la dynamique, on obtient :

$$m\ddot{y} = -mg + \mu_l Mg. \quad (3.7)$$

Cette première équation nous enseigne tout d’abord que dans un régime stationnaire le patin charrie une quantité de sable  $\langle M \rangle = m/\mu_l$ . S’il l’on souhaite poursuivre l’intégration de cette équation il convient de trouver une relation liant  $M$  à la trajectoire  $y$  du patin. Or si l’on fait un bilan de matière dans le système constitué du patin et du sable qu’il transporte (voir figure 3.15) on obtient :

$$\begin{aligned} M(t + dt) &= M(t) + h_n(x = vt + L_0)L\rho\phi v dt - h_{n+1}(x = vt)L\rho\phi v dt, \\ \dot{M} &= (h_n(x = vt + L_0) - h_{n+1}(x = vt))L\rho\phi v, \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $h_n$  représente le profil de la piste au tour  $n$  et  $h_{n+1}$  le profil de la piste au tour  $n + 1$ , c’est-à-dire le profil laissé par le patin derrière lui. Afin de simplifier les calculs nous pouvons nous concentrer uniquement sur le premier tour de piste et supposer



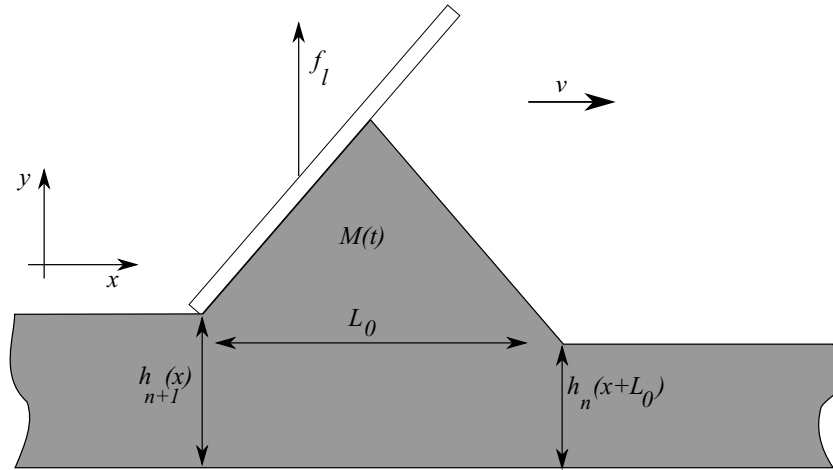


FIGURE 3.15 – **Vue schématique du patin charriant du sable.** Il est possible de lier la masse  $M(t)$  aux altitudes  $h_{n+1}(x)$  et  $h_n(x + L_0)$  en effectuant un bilan de quantité de matière.

qu'initialement la piste est plate et on posera  $h_0 = cste = 0$ . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc pour le premier tour de piste :

$$m \frac{d^3 y}{dt^3} = -h_1(x = vt) L \rho \phi v \mu_l g. \quad (3.9)$$

À ce stade, il faut relier la hauteur  $h_1(x = vt)$  à la trajectoire  $y(t)$  du patin. Nous pouvons faire l'hypothèse que la plaque laisse derrière elle une piste qui possède la même altitude que son extrémité, soit :  $h_1(x = vt) = y(t)$ . Cette hypothèse suppose que la masse transportée ne dépend pas de la vitesse. Toutefois, ceci n'est pas tout à fait exact au vu des données de la figure 3.9 qui montre clairement que la masse transportée par un patin évoluant à altitude constante augmente avec la vitesse. Comme expliqué précédemment cette augmentation de la masse provient des grains présents dans la bande de cisaillement dont la largeur est constante avec la vitesse. Prendre en compte cet effet revient à ajouter une constante  $\delta(v)$  à l'équation liant  $h_1$  à la trajectoire  $y(t)$  :  $h_1(x = vt) = y(t) + \delta(v)$ . Dans ce modèle simpliste permettant de dégager les mécanismes physique de l'instabilité, nous choisissons de ne pas prendre en compte cet effet. Les résultats ne s'en retrouvant, de plus, pas affectés. Finalement nous aboutissons à l'équation suivante :

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \kappa^3 y = 0, \quad (3.10)$$

dans laquelle le coefficient  $\kappa$  vaut :  $(\mu_l L \rho \phi v g / m)^{1/3}$ . Cette équation différentielle linéaire du troisième degré est connue sous le nom de *jerk equation*. On la retrouve par exemple lorsqu'une particule chargée se déplace dans son propre champ électromagnétique. Nous présentons sa résolution au paragraphe suivant.

### 3.6.2 Jerk equation

Afin de résoudre l'équation 3.10, il convient de chercher des solutions sous la forme d'exponentielles complexes. On pose alors  $y = y_0 \exp(rt)$ , où  $r$  est un nombre complexe. Alors si  $y$  est solution de l'équation 3.10,  $r$  vérifie l'équation suivante :

$$r^3 = -\kappa^3. \quad (3.11)$$

Il existe alors trois solutions pour  $r$  :  $(-\kappa, \kappa(1/2 + \sqrt{3}/2j), \kappa(1/2 - \sqrt{3}/2j))$ ,  $j$  désigne le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ . On constate que parmi ces trois racines, deux donneront des solutions divergentes pour l'équation 3.10. Le système que décrit cette équation est donc toujours instable. Ceci est en contradiction avec les observations que l'on a faites de la tôle ondulée. Toutefois, les solutions divergentes sont également oscillantes à la pulsation  $\Omega = \sqrt{3}/2\kappa$ , ce qui correspond à une longueur d'onde de  $\lambda = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\kappa}$ . La figure 3.16 compare cette longueur d'onde avec la longueur d'onde des rides formées dans diverses expériences de tôle ondulée (différentes masses et largeurs du patin). On remarque qu'aux barres d'erreurs près les deux longueurs d'onde sont égales, sans qu'il n'y ait de paramètre ajustable dans ce modèle. Ainsi, par analogie avec l'usure ondulatoire des rails, il semble qu'ici en étudiant la dynamique de la plaque, nous avons révélé le mécanisme fixant la longueur d'onde de l'instabilité. Ceci nous encourage donc à poursuivre l'étude de l'instabilité de tôle ondulée dans cette voie. Même si le mécanisme déstabilisant est désormais connu, les mécanismes stabilisant la piste à faible vitesse demeurent flous. En effet, ce modèle simpliste possède des solutions qui sont toujours divergentes. Ceci vient du fait que l'expression trouvée est valable en régime stationnaire, à altitude constante et sur un lit plat. Lorsque le lit est ondulé et que le patin se déplace verticalement l'expression  $f_l = \mu_l Mg$  n'est certainement plus valable. Nous avons clairement omis des termes dans l'expression de  $f_l$ . Ainsi dans la partie suivante nous étudions l'influence du mouvement vertical du patin sur l'expression de la force de portance.

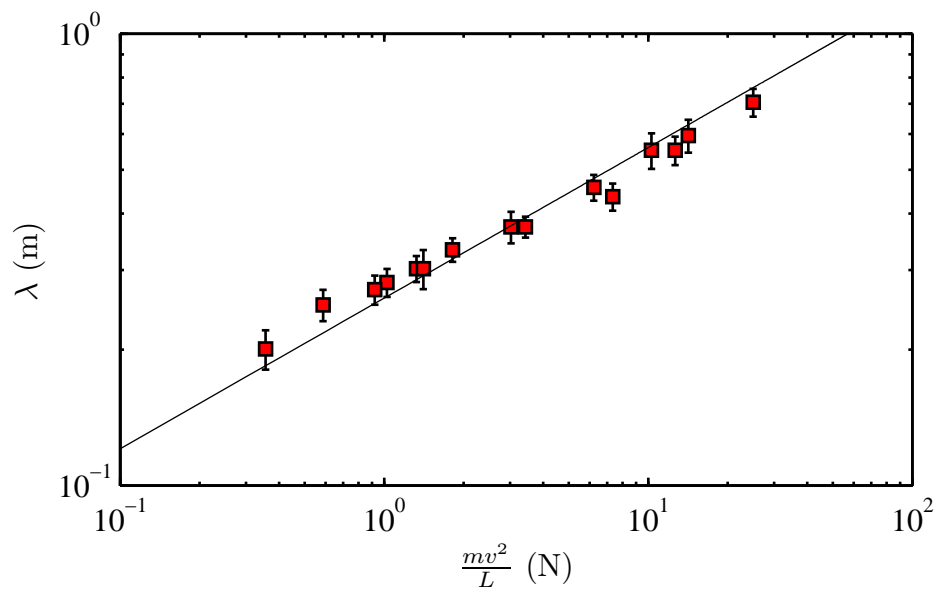


FIGURE 3.16 – Comparaison entre la longueur d’onde mesurée expérimentalement (carrés rouges) et la longueur d’onde prédite par le modèle (ligne en trait plein). Le bon accord entre les mesures et le modèle montre que l’on a identifié le mécanisme fixant la longueur d’onde.



# Chapitre 4

## Mesure de forces en régime oscillant

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Premiers essais . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>4.2</b>	<b>Oscillations forcées . . . . .</b>	<b>104</b>
4.2.1	Motivations . . . . .	104
4.2.2	Mises en œuvre expérimentale et numérique . . . . .	105
4.2.3	Oscillations sur un lit plat . . . . .	105
4.2.4	Intégration du PFD sur le premier tour . . . . .	107
4.2.5	Portance sur une route ondulée . . . . .	108
4.2.6	Remodelage de la piste . . . . .	110
4.2.7	Intégration des équations du mouvement . . . . .	112
4.2.8	Taux de croissance . . . . .	113
<b>4.3</b>	<b>Conclusions et perspectives . . . . .</b>	<b>115</b>

---

## 4.1 Premiers essais

Les expériences de pénétration d'un intrus dans un milieu granulaire (Seguin et al. [2011]; Costantino et al. [2008, 2011b]; Peng et al. [2009]) montrent toutes une dépendance de la force de portance avec la distance d'enfoncement de l'objet. Dans ces expériences, faites à vitesse horizontale nulle et en régime quasistatique, la relation liant force de portance et pénétration est quasi-linéaire. Le sable agit alors sur l'intrus comme un ressort linéaire en compression.

Les mesures de force que nous avons décrites précédemment ont toutes été faites dans un régime où l'altitude du patin était confondue avec l'altitude de la piste. Ainsi, on peut dire que dans nos expériences l'enfoncement du patin était nul. Afin de sonder l'effet d'un enfoncement non-nul nous avons réalisé des simulations avec le protocole suivant :

- Initialement le patin est au dessus de la piste et ne charrie pas de sable, il avance à une vitesse horizontale constante  $v$ .
- On enfonce alors le patin dans le sable à une profondeur donnée sous le niveau de la piste. Son altitude est diminuée linéairement sur une distance horizontale de l'ordre de 100 diamètres de grain alors que la piste en fait 300.
- On maintient le patin à cette altitude pendant plusieurs tours de piste.

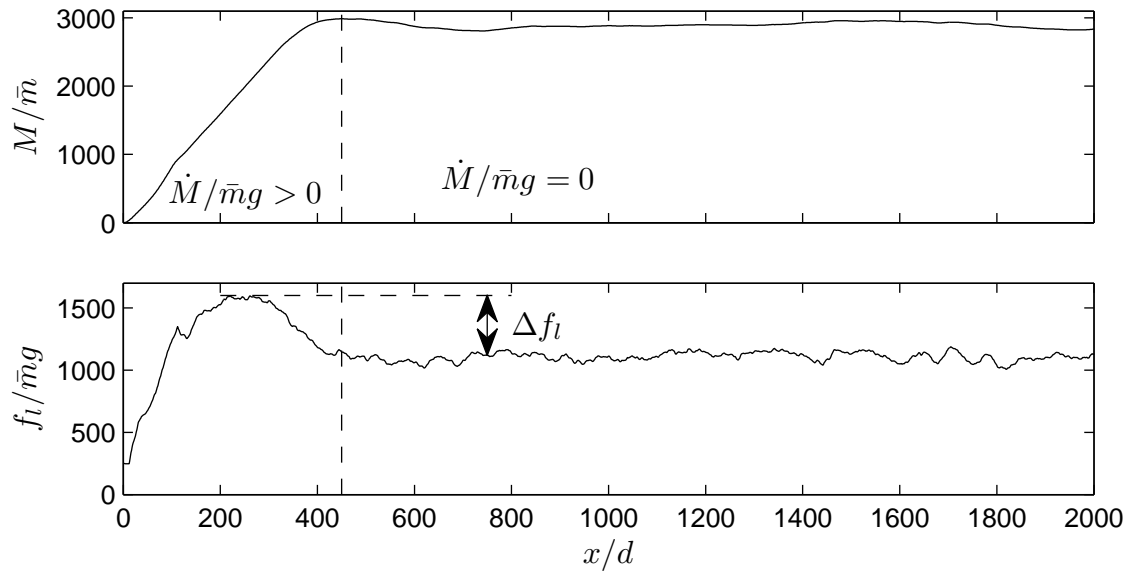


FIGURE 4.1 – **En haut, évolution de la masse transportée au cours d’une simulation.** Pendant les 100 premiers diamètres de grain la masse augmente non-linéairement puis de façon linéaire sur les 200 diamètres de grain restant pour finir le tour. **En bas, évolution de la force de portance au cours de cette simulation.** On constate que  $f_t$  passe par un maximum signe que  $\dot{M} \neq 0$  à une influence.

La figure 4.1 montre l'évolution de la masse transportée et de la force de portance en fonction de la distance parcourue. Initialement la masse et la portance sont nulles puis augmentent fortement sur une distance de 100 grains, c'est-à-dire lorsque l'on enfonce le patin. Ensuite, sur la distance de 200 grains nécessaire pour finir le premier tour, on

observe que la masse de sable augmente linéairement comme le prévoit la conservation de la masse de l'équation 3.8. En effet on a  $\dot{M} = h_1 - y = cste > 0$ . Pendant ce premier tour, la force de portance augmente également. Puis lorsque ce tour se termine  $\dot{M}$  diminue pendant 100  $d$  jusqu'à valoir zéro une fois que le patin a parcouru environ 400  $d$  au total. Cette distance correspondant à la distance nécessaire pour que la piste soit entièrement à la même altitude que le patin. Comme on peut le voir sur la figure 4.1, entre 300  $d$  et 400  $d$  la quantité de sable augmente très légèrement alors que la force de portance diminue sensiblement. Cette diminution est l'image de l'influence de  $\dot{M}$  (ou encore  $h_1 - y$ , d'après la conservation de la masse) sur la force de portance. La différence entre le maximum de  $f_l$  et sa valeur dans l'état stationnaire, notée  $\Delta f_l$ , a été mesurée pour différentes profondeurs de pénétration et différentes vitesses. Il en résulte que  $\Delta f_l$  ne dépend pas de  $M$  et est directement proportionnel à  $\dot{M}$  (voir figure 4.2).

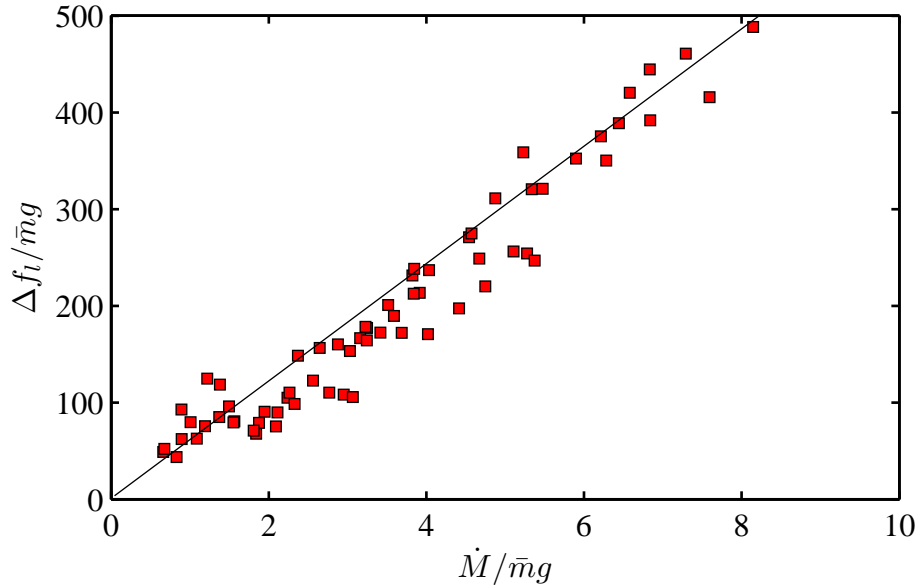


FIGURE 4.2 –  $\Delta f_l$  en fonction de  $\dot{M}$ . Ces résultats de simulations ont été obtenus en faisant varier la vitesse de 1 à 10  $\sqrt{gd}$  et la profondeur  $h_1 - y$  de 1 à 4 $d$ . On remarque alors que  $\Delta f_l$  est proportionnel à  $\dot{M}$  ou encore proportionnel à  $(h_1 - y)v$ .

On peut alors interpréter la force  $\Delta f_l$  de deux façons différentes. On peut tout d'abord la voir comme l'influence d'une distance de pénétration non nulle. Dans ce cas, on remarque que comme pour Costantino et al. [2008, 2011b]; Seguin et al. [2011] et Peng et al. [2009] nous trouvons une force qui est proportionnelle à la profondeur du patin. Cependant, la force que nous mesurons dans les simulations contient une dépendance linéaire avec la vitesse horizontale. En effet,  $\Delta f_l \propto \dot{M} \propto (h_1 - y)v$ . D'un autre point de vue, une force proportionnelle à  $\dot{M}$  peut également s'interpréter comme la force nécessaire pour donner à une masse  $dM$  initialement au repos une vitesse  $v$  en un intervalle de temps  $dt$ . En effet, lorsque le patin accumule du sable, il doit mettre ce sable en mouvement et le faire passer d'un état au repos à une vitesse  $v$ . Dans ce cas, l'inertie des grains applique une force d'inertie  $\dot{M}v$  horizontalement sur le patin. Cette force est aussi ressentie verticalement car comme nous l'avons montré précédemment, forces de portance et de traînée sont intimement liées. Cependant, cette interprétation



prédit que le comportement de  $\Delta f_l$  avec la vitesse devrait être quadratique, ce qui n'est pas le cas expérimentalement. On peut alors résumer cela dans le tableau suivant :

Mécanisme possible	Effet sur la force
Test de pénétration purement vertical	$k(h_1 - y)$
Patin circulant sur une piste	$k(h_1 - y)v$
Mise en mouvement de $dM$ pendant $dt$	$k(h_1 - y)v^2$

Finalement nos mesures s'insèrent entre les deux interprétations que l'on peut faire de  $\Delta f_l$ . Nous avons tout de même dévoilé ici une nouvelle caractéristique de la force de portance. L'hypothèse selon laquelle son expression obtenue dans l'état stationnaire était incomplète se révèle juste. On sait donc qu'elle dépend également de  $\dot{M}$ . La force de portance peut également à priori dépendre de  $\dot{y}$ . L'analyse de la séquence pendant laquelle le patin s'enfonce à vitesse constante dans la piste ne nous a pas permis de bien cerner cette dépendance. Nous avons alors choisi un autre protocole et décidé d'imposer au patin des oscillations sinusoïdales.

## 4.2 Oscillations forcées

### 4.2.1 Motivations

Jusqu'à présent la force de portance agissant sur le patin ne comporte que des termes linéaires, c'est-à-dire proportionnels à  $M$  et à sa dérivée. De plus, nous avons mis en évidence que l'instabilité de tôle ondulée est une bifurcation super-critique ce qui signifie qu'un terme linéaire déstabilise la piste. De plus, nous avons observé que les croissances et décroissances de l'amplitude des rides sont exponentielles. On peut donc supposer qu'une analyse de stabilité linéaire nous permettra d'interpréter le phénomène de tôle ondulée. Supposons alors que le système que l'on étudie (la plaque et les grains qu'elle transporte) soit régi par des équations linéaires. Nous cherchons alors la force de portance sous l'expression suivante :

$$f_l = \mu M g + b y + c \dot{y}. \quad (4.1)$$

Cette expression peut être vue comme l'expression mathématique la plus simple d'une force linéaire par rapport à  $y$ . Physiquement, on retrouve dans cette expression les deux termes que nous avons déjà mesurés. C'est-à-dire, un terme proportionnel à  $M$  que nous avons mesuré en régime stationnaire, et également un terme proportionnel à la profondeur du patin. On a rajouté à ces deux termes un terme de dissipation visqueuse. Une telle expression de la force de portance est une hypothèse que l'on vérifiera dans la suite. La manière la plus commode d'étudier un système linéaire est de s'intéresser à sa réponse fréquentielle. Nous avons donc mesuré la fonction de réponse de la force de portance à une perturbation sinusoïdale. Cette perturbation pouvant être un léger mouvement vertical du patin à la pulsation  $\omega$  ou une piste légèrement ondulée. Nous imposerons donc successivement les conditions suivantes :

$$\begin{cases} y = y_0 + A \exp(j\omega t), & h = h_0 \\ y = y_0, & h = h_0 + A \exp(j\omega x/v) \end{cases} \quad (4.2)$$

### 4.2.2 Mises en œuvre expérimentale et numérique

Nous avons mesuré la réponse de la force de portance à une perturbation à la fois dans les simulations et dans les expériences. Pour cela, nous avons imposé un mouvement vertical au patin tout en le tirant horizontalement à vitesse  $v$  constante sur une piste plate. Comme les oscillations doivent rester des perturbations autour d'un état d'équilibre, nous avons dû nous assurer que la masse de sable transporté variait peu et que le patin ne perdait pas le contact avec la piste. Les mesures de force étant assez bruitées, nous avons voulu moyenner le signal fourni par les jauges de contrainte sur plusieurs périodes du mouvement. Ceci implique donc de faire plusieurs tours sur la piste. Cependant, on souhaite garder une piste plate. Nous avons donc installé (expérimentalement et numériquement) un second patin d'altitude fixe. Expérimentalement ce nouveau patin prend la place du patin libre qui servait à modéliser la voiture dans l'expérience de tôle ondulée (*i.e.* sur le bras opposé). Ce second patin sert de bulldozer en lissant la piste avant l'arrivée du patin oscillant. Les mesures de force sont alors moyennées sur environ trente périodes. Il est assez délicat de moyenner sur plus de périodes, car le système formé de deux patins circulant à des altitudes voisines sur une piste est instable. Très souvent, aussi bien dans les expériences que dans les simulations (où les patins avaient rigoureusement la même altitude), nous avons observé que l'un des patins perdait tout le sable qu'il contenait au profit de l'autre. Cette instabilité est peut-être à rapprocher des oscillations de la masse de sable transporté que nous avons décrites au paragraphe 3.2.1. Pouvoir régler l'altitude d'un des patins avec une précision de  $5\text{ }\mu\text{m}$  s'est révélé ici très utile. Il a donc fallu tâtonner sur la position relative des patins (expérimentalement et numériquement) pour pouvoir osciller autour d'un état stationnaire avec une masse de sable charrié constante.

### 4.2.3 Oscillations sur un lit plat

En faisant osciller le patin sur un lit plat, nous avons, en notation complexe :  $\underline{y} = A_y \exp(j\omega t)$  et  $\underline{f}_l = A_f \exp(j\omega t)$  on peut alors définir la fonction de réponse  $\underline{H}$  de la force de portance par :

$$\underline{H} = \frac{\underline{f}_l}{\underline{y}}, \quad (4.3)$$

La figure 4.3 présente le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\underline{H}$  (gain  $|\underline{H}|$  et phase  $\psi$  de  $\underline{H}$  en fonction de la pulsation  $\omega$ ) mesurée dans les simulations et dans les expériences. On constate que cette fonction de transfert peut être modélisée par une expression du type :

$$\underline{H} = -b + j \left( \frac{a}{\omega} + c\omega \right) \quad (4.4)$$

C'est la fonction de transfert d'un filtre coupe-bande du premier ordre. Ceci est compatible avec l'expression que l'on s'est donnée plus haut pour  $f_l$ . Dans cette expression, on retrouve les deux termes que l'on avait déjà mesurés : le terme constant  $b$  provient de la dépendance de  $f_l$  vis à vis de  $\dot{M}$  (c'est-à-dire  $h - y$ ) et le terme proportionnel à  $j/\omega$  vient de sa dépendance à  $M$  (qui est l'intégrale de  $h - y$ ). On peut alors attribuer

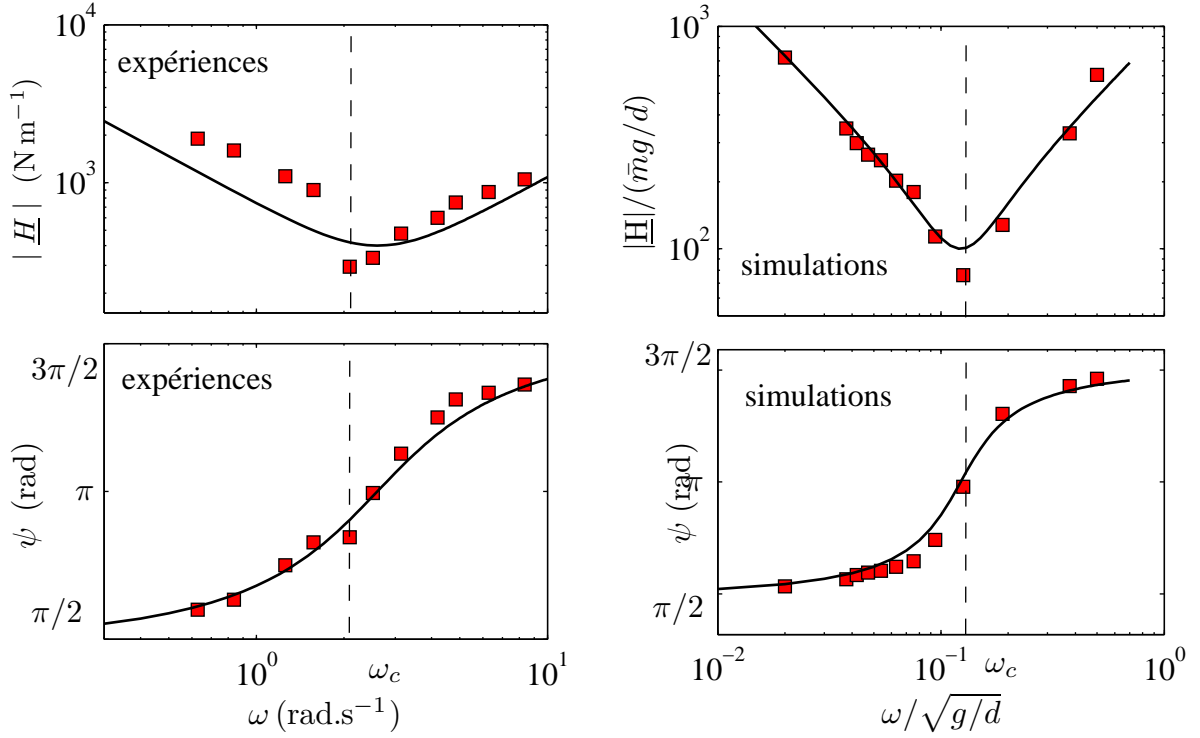


FIGURE 4.3 – **Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\underline{H}$**  mesuré dans les expériences (à gauche, pour  $\langle M \rangle = 0.58$  kg et  $v = 0.5$  m.s<sup>-1</sup>) et dans les simulations (à droite, pour  $\langle M/\bar{m} \rangle = 1000$  et  $v = 5\sqrt{gd}$ ). Les courbes en train plein correspondent à l'équation 4.4 et la ligne en pointillés symbolise la pulsation de coupure  $\omega_c$  pour laquelle le gain est minimal et la fonction de transfert réelle.

le terme proportionnel à  $j\omega$  à une contribution de  $\dot{y}$  dans la force de portance. Dans la suite, nous cherchons donc les dépendances des coefficients  $b$  et  $c$  avec la vitesse  $v$  du patin et la masse moyenne de sable  $\langle M \rangle$  qu'il transporte. Cette étude a été réalisée uniquement dans les expériences.

D'après les mesures effectuées en régime stationnaire, on peut savoir que le coefficient  $a$  vaut  $a = \mu g L \rho \phi v$ . Alors la mesure de la pulsation de coupure  $\omega_c$  de ce filtre, définie comme la pulsation pour laquelle  $|\underline{H}|$  est minimal, permet de connaître la valeur du coefficient  $c$ , via la relation :  $\omega_c = (\mu L \rho \phi v / c)^2$ . De plus, on peut obtenir simplement  $b$  par :  $b = |\underline{H}(\omega_c)|$ . Nous avons alors fait plusieurs expériences avec des vitesses et des quantités de sable transporté différentes et à chaque fois nous avons mesuré  $\omega_c$  afin d'en déduire les coefficients  $b$  et  $c$ . La figure 4.4 présente la valeur de la pulsation de coupure  $\omega_c$  en fonction de la vitesse du patin pour une masse de sable moyenne de  $\langle M \rangle = 0.58$  kg. On constate que cette pulsation est une fonction affine de la vitesse dans la gamme explorée ici (entre 0.1 et 1 m.s<sup>-1</sup>). Grâce à cette pulsation de coupure nous pouvons déterminer les coefficients  $b$  et  $c$ . Sur la figure 4.5 nous avons représenté l'évolution de ces coefficients en fonction de la vitesse du patin et de la masse de sable transportée. Comme nous l'avons déjà remarqué dans les simulations, le coefficient  $b$  ne dépend pas de la masse de sable transporté et est proportionnel à la vitesse de la plaque  $v$ ,  $b = B_0 v$  avec  $B_0 = 560$  kg.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>. Le coefficient  $c$  est quant à lui proportionnel

à la masse de sable transporté et possède un comportement non-trivial vis-à-vis de la vitesse :  $c = C_0 \mu \langle M \rangle g L \rho \phi v / (v + v_0)^2$ , avec  $C_0 = 8.2 \cdot 10^{-1} \text{ m.kg}^{-1}$  et  $v_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ . Ce comportement non-trivial vient du fait que  $\omega_c$  est une fonction affine et non linéaire de la vitesse. L'interprétation physique de la vitesse  $v_0$  reste floue. Cependant, sa valeur est assez faible ( $0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ) comparée à la vitesse du patin (typiquement  $1 \text{ m.s}^{-1}$ ) et prendre  $v_0 = 0$  ne change pas fondamentalement les résultats obtenus par la suite.

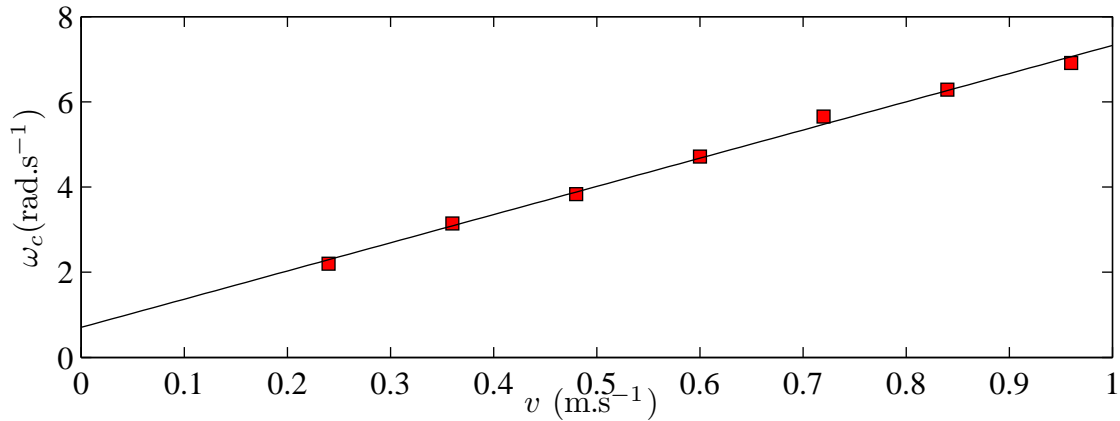


FIGURE 4.4 – **Pulsation de coupure  $\omega_c$  en fonction de la vitesse du patin** pour une masse de sable moyenne de  $\langle M \rangle = 0.58 \text{ kg}$ . La pulsation de coupure suit une loi affine avec la vitesse.

Grâce à ces mesures nous connaissons entièrement la force de portance agissant sur la plaque. Nous pouvons donc, comme dans la partie 3.6 intégrer le principe fondamental de la dynamique sur le premier tour de piste de la plaque.

#### 4.2.4 Intégration du PFD sur le premier tour

L'expression complète de la force de portance sur un lit plat peut donc être effectivement modélisée par l'expression 4.1, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\ddot{y} = -mg + \mu Mg + by + c\dot{y} \quad (4.5)$$

La figure 4.6 présente la trajectoire du patin obtenue par intégration numérique de cette équation pour trois vitesses différentes. On aperçoit clairement trois régimes. Dans le premier, la trajectoire du patin est semblable à celle d'un oscillateur sur-amorti. Dans le second régime le patin présente des oscillations amorties tandis qu'à haute vitesse la trajectoire du patin diverge en oscillant. Ces trois régimes se retrouvent dans les expériences et les simulations. Le régime à haute vitesse est le régime numéro quatre que l'on avait identifié dans la partie 2.1 et qui correspond au cas où le patin fait des ricochets sur la piste dès le premier tour. La vitesse d'apparition de ce régime,  $v^*$  dépend de la masse de la plaque. On peut l'évaluer numériquement en intégrant l'équation 4.5 pour différents masses et vitesses. On observe sur la figure 4.7 qu'elle suit une loi de puissance :  $v^* \propto \sqrt{m}$  ce qui est en parfait accord avec les mesures de

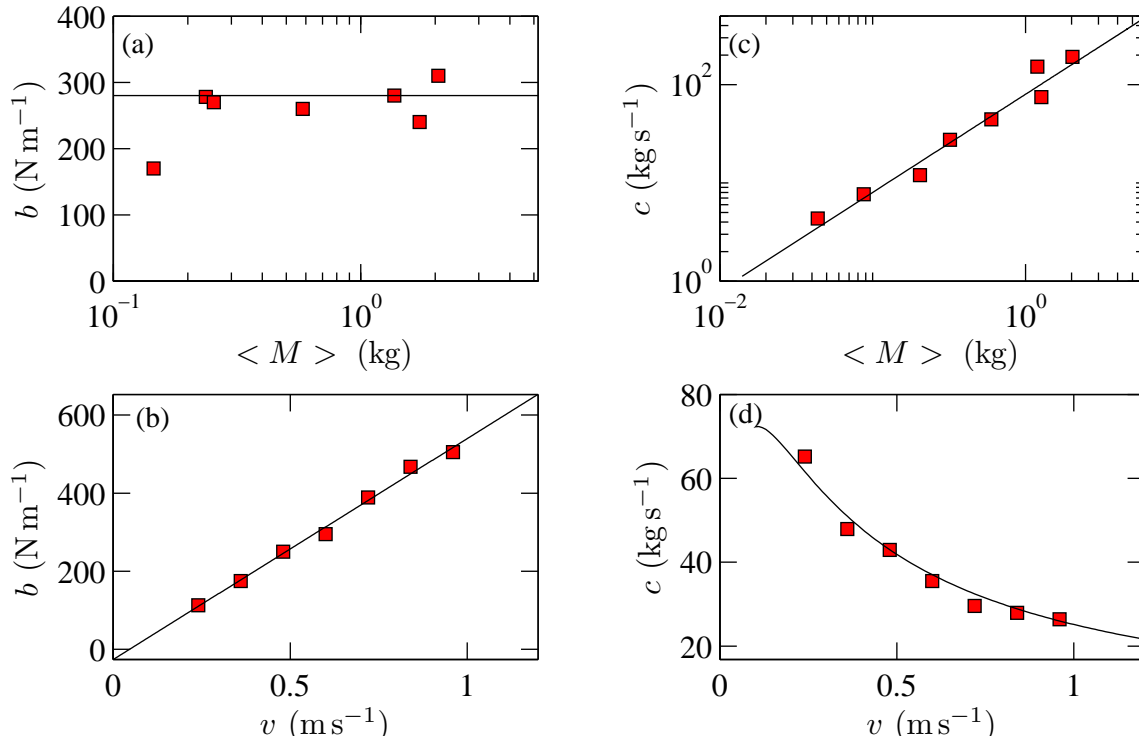


FIGURE 4.5 – Coefficients  $b$  et  $c$  en fonction de la vitesse du patin et de la masse moyenne qu’il transporte. Comme nous l’avions déjà pressenti au paragraphe précédent, le coefficient  $b$  est proportionnel à la vitesse et ne dépend pas de la masse transportée. Par contre,  $c$  est proportionnel à  $\langle M \rangle$  et à  $v/(v + v_0)^2$ , d’après la loi affine liant  $\omega_c$  à  $v$ .

Hewitt et al. [2012]. Ainsi les mesures de la force de portance permettent de prédire le seuil d’apparition des ricochets du patin sur la piste. Il ne faut toutefois pas confondre cette vitesse avec la vitesse critique de l’instabilité de tôle ondulée qui est plus faible.

Finalement, l’expression complète de la force de portance agissant sur la plaque lorsqu’elle se déplace sur une piste lisse permet de reproduire fidèlement le comportement du véhicule pendant son premier tour de piste. Afin de continuer cette analyse de stabilité linéaire il convient de chercher l’influence d’un profil initial ondulé.

#### 4.2.5 Portance sur une route ondulée

Dans l’expression de la force de portance mesurée dans un état stationnaire, le profil de la piste au  $n^{\text{ième}}$  et  $n + 1^{\text{ième}}$  tour ont des rôles symétriques. C’est-à-dire que la force de portance est une fonction de  $h_{n+1} - h_n$ . On peut alors s’attendre à ce que ce soit le cas dans toutes les situations. Afin de le vérifier, nous avons mesuré la fonction de transfert  $\underline{G}$  définie par :  $\underline{G} = \frac{f}{h_n}$  lorsque que  $y = cste$ . Ainsi, dans l’expérience nous avons déplacé les capteurs de force. Initialement fixés sur le patin qui oscillait, ils ont été montés sur le patin fixe. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\underline{G}$  est tracé sur la figure 4.8. Lorsque l’on effectue une telle expérience, il faut non seulement prendre les mêmes précautions que pour la mesure de  $\underline{H}$ , mais il faut également s’assurer que la longueur d’onde des rides sur lesquelles évolue le patin

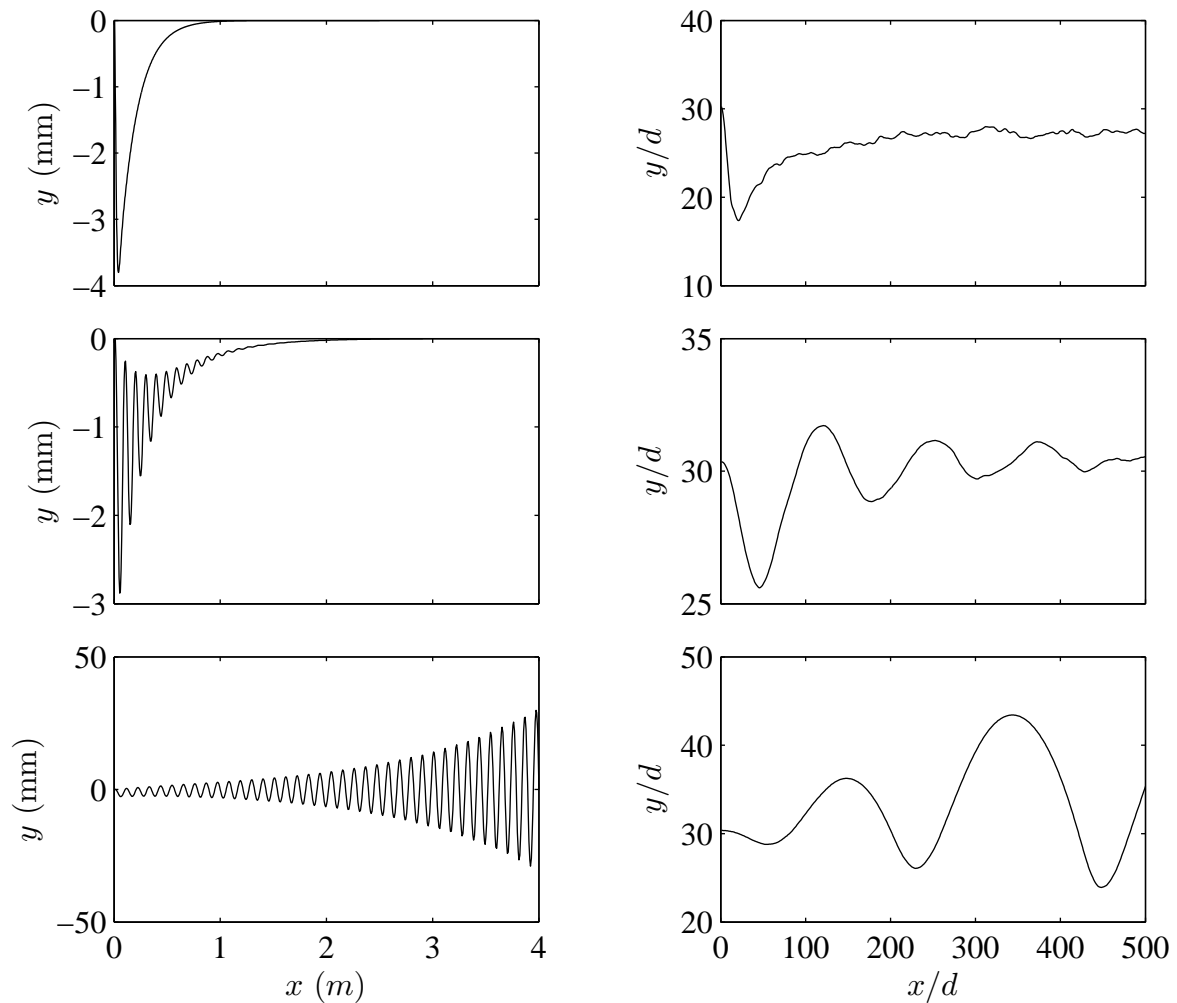


FIGURE 4.6 – **Exemples de trajectoire du patin sur le premier tour d’une piste lisse.** À gauche, sont représentées trois trajectoires calculées via l’intégration numérique de l’équation 4.5 pour des vitesses (de haut en bas) de 0.8, 1.2 et 2.0  $\text{m.s}^{-1}$ . Les trois trajectoires ressemblent à celles obtenues en simulation (représentées à droite) : on observe trois régimes avec des oscillations sur-amorties, amorties et amplifiées. On peut remarquer le très bon accord qualitatif entre les simulations numériques et le modèle fondé sur des mesures expérimentales.

soit grande devant la longueur notée  $L_0$  sur la figure 3.15. En effet, lorsque la plaque charrie du sable, celle-ci ressent l’effet de la piste dès la position  $x + L_0$ . Lorsque le patin se déplace sur une piste lisse, ceci n’a pas n’importance, mais lorsque la piste est ondulée si l’on veut négliger l’influence de  $L_0$  il faut  $\lambda \gg L_0$ . Ainsi dans les expériences réalisées pour mesurer  $\underline{G}$ , nous avons fixé la masse de sable transporté de manière à ce que  $L_0$  soit de l’ordre du centimètre tandis que les longueurs d’onde s’étendent de 5 cm à 150 cm.

Sur la figure 4.8 on s’aperçoit tout d’abord que le gain et la phase de  $\underline{G}$  ont bien le comportement attendu d’un filtre coupe-bande du premier ordre. C’est-à-dire que la

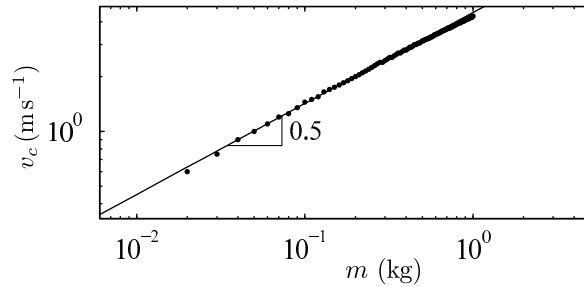


FIGURE 4.7 – Vitesse d’apparition des ricochets  $v^*$  prédite par le modèle en fonction de la masse du patin. Cette vitesse suit une loi de puissance de pente 1/2 à l’instar de celle mesurée expérimentalement par Hewitt et al. [2012].

fonction de transfert est bien la somme de trois termes : un terme constant, un terme proportionnel à  $j\omega$  et un autre proportionnel à  $1/(j\omega)$ . Les courbes en trait plein sur la figure 4.8 ne sont pas des modélisations de la fonction de transfert, mais le gain et la phase calculés grâce aux coefficients mesurés au paragraphe précédent et en faisant l’hypothèse que  $h_{n+1}$  et  $h_n$  jouent des rôles symétriques. Le bon accord entre ce modèle pour la fonction de transfert  $\underline{G}$  et les mesures de force nous permettent d’affirmer que  $h_{n+1}$  et  $h_n$  ont effectivement des rôles symétriques dans la force de portance. Celle-ci est donc une fonction de  $h_{n+1} - h_n$ .

Nous avons alors l’expression complète de la force de portance. Cependant, jusqu’à présent nous avons fait l’hypothèse que  $h_{n+1} = y$ , supposant alors que le remodelage de la piste était simplement donnée par l’altitude du patin. Afin de vérifier cette hypothèse nous avons mesuré séparément  $h_{n+1}$  et  $y$  dans le but de les comparer.

#### 4.2.6 Remodelage de la piste

Le remodelage de la piste par le patin a été mesuré de trois façons différentes dans les expériences. Tout d’abord, en utilisant le patin libre, le capteur d’angle magnétique qui lui est attaché nous a permis de mesurer  $y$  et le télémètre laser, positionné juste derrière le patin, mesurait  $h_{n+1}$ . Cette méthode est bien sûr sujette aux défauts d’étalonnages des deux capteurs. Nous avons également utilisé deux télémètres laser, l’un mesure l’altitude du patin dont on contrôle l’altitude et l’autre mesure le profil qu’il imprime dans la piste. Cette mesure dépend également de l’étalonnage respectif des deux télémètres. La dernière méthode utilisée consiste à utiliser un seul télémètre laser. Celui-ci mesure l’altitude du patin oscillant pendant un tour, puis on le déplace afin de mesurer le profil de la piste laissé par le patin pendant ce tour. Cette méthode est un peu plus fastidieuse que les précédentes car il faut déplacer le télémètre laser entre chaque mesure. Son avantage est qu’elle utilise le même capteur pour la mesure de  $h_{n+1}$  et de  $y$ . Ces trois méthodes ont fourni le même résultat qui est représenté sur la figure 4.9. Tout d’abord, nous avons vérifié que la trajectoire du patin et le profil qu’il laissait derrière lui étaient en phase. Ce premier résultat semble trivial mais on aurait pu imaginer qu’il y ait un déphasage entre ces deux grandeurs. En effet, les rides éoliennes et sous-marines naissent d’un déphasage entre le profil du lit de grains et de l’écoulement de fluide. Le résultat le plus surprenant est que l’amplitude du profil est



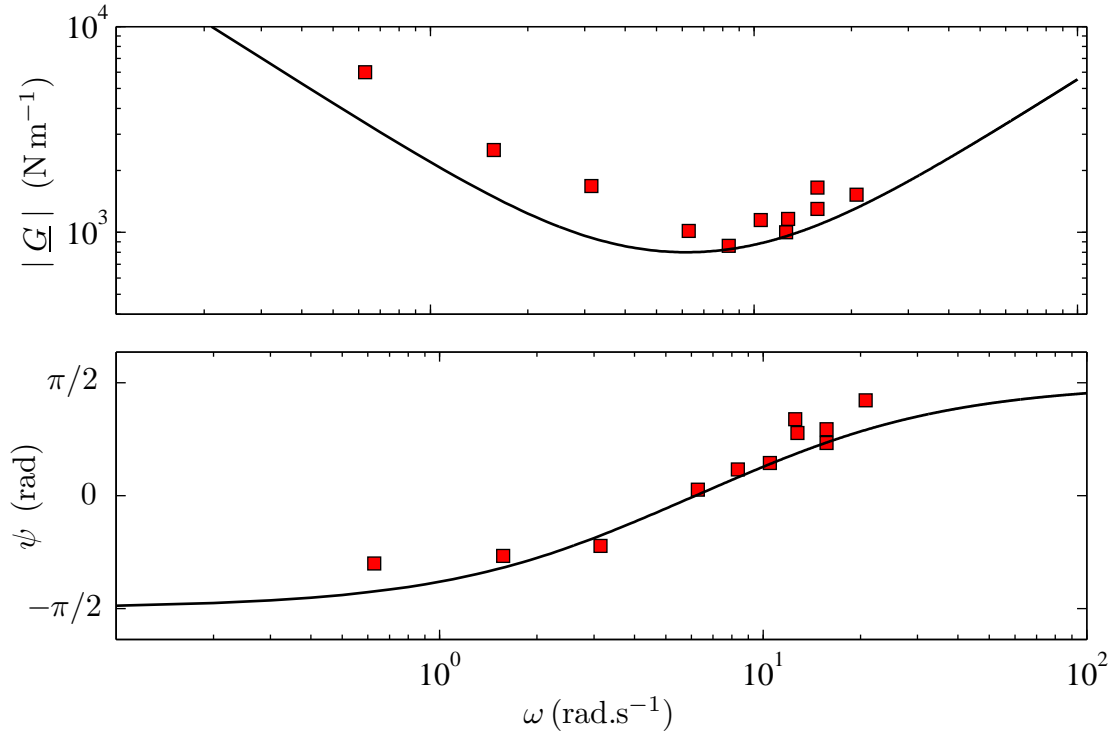


FIGURE 4.8 – **Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\underline{G}$** , pour une masse transportée de 1 kg et une vitesse de 1.5 m.s<sup>-1</sup>. La courbe en trait plein correspond à la fonction de transfert calculée à partir des coefficients mesurés lorsque le patin oscille sur un lit plat et en faisant l'hypothèse que  $h_{n+1}$  et  $h_n$  ont des rôles symétriques. Le bon accord entre ce modèle et les mesures justifie cette hypothèse.

plus faible que l'amplitude de la trajectoire. On peut alors définir, en utilisant la notation complexe, un coefficient d'efficacité d'impression de la trajectoire dans la piste,  $\chi = \frac{h_{n+1}}{y}$ . Nous avons déjà vu dans la partie 3 que dans un état stationnaire il y a un décalage  $\delta$  entre  $y$  et  $h_{n+1}$  ( $h_{n+1} = y + \delta(v)$ ). Il n'est finalement pas si surprenant qu'en régime oscillant l'amplitude des ces deux quantités ne soient pas égales. Le rapport  $\chi$  est réel et ne semble pas dépendre de la longueur d'onde du motif (voir figure 4.9b)) dans la gamme explorée. De la même façon,  $\chi$  semble indépendant de la vitesse du patin dans une plage comprise entre 0.1 et 1.5 m.s<sup>-1</sup>. Nous avons également vérifié que le rapport  $\chi$  ne dépendait pas de l'amplitude de la trajectoire du patin tant que celle-ci restait inférieure à 5 mm. Ainsi, nous pouvons conclure que  $h_{n+1}(x) = \chi y(x = vt)$ , avec  $\chi = 0.9 \pm 0.05$ . Nous pouvons interpréter ce coefficient comme un coefficient d'efficacité à l'impression de la trajectoire du patin dans la piste. Ceci modifie alors quelque peu les résultats précédents car le coefficient  $a$  défini dans l'équation 4.4 et que l'on a relié à la mesure de force en régime stationnaire vaut finalement :  $a = \mu g L \rho \phi v \chi$ . Le coefficient  $c$  calculé à partir de  $a$  et  $\omega_c$  est également modifié d'un facteur  $\chi$  :  $c = C_0 \chi \mu \langle M \rangle g L \rho \phi v / (v + v_0)^2$ .

Finalement, grâce aux mesures de forces dans un régime oscillant nous avons une description complète de la dynamique du patin. De plus, en mesurant son altitude et le profil qu'il laisse dans la piste, nous avons une expression du processus d'érosion

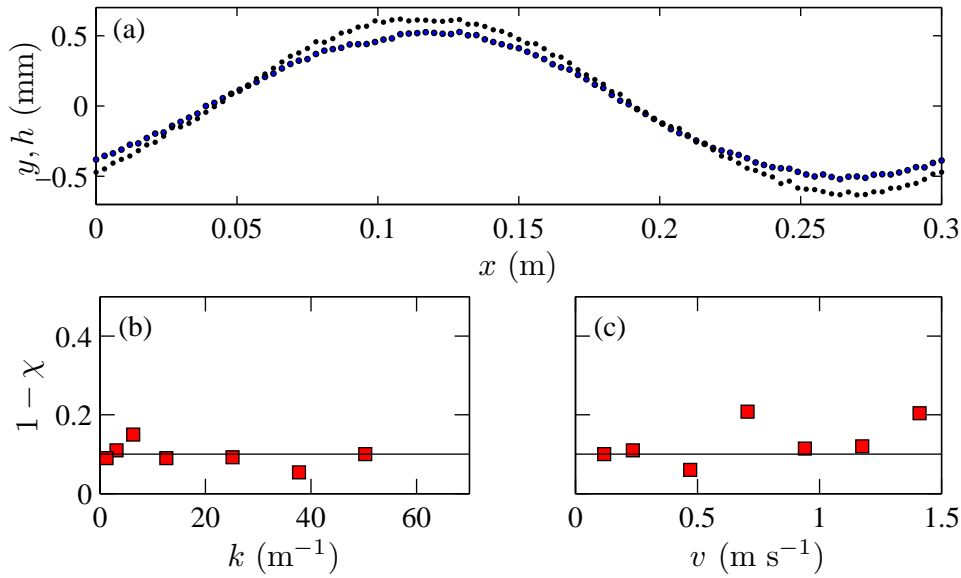


FIGURE 4.9 – **Illustration du remodelage de la piste.** a) Exemple de trajectoire du patin (point noir) et du profil qu'il imprime dans le sable (point bleu) en fonction de la position sur la piste, pour une vitesse de  $0.5 \text{ m.s}^{-1}$  et une longueur d'onde de 30 cm. b)  $1 - \chi$  en fonction du vecteur d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . c)  $1 - \chi$  en fonction de la vitesse  $v$  du patin. Dans ces deux cas, on remarque que le rapport  $\chi$  est constant, proche de 1 mais toutefois plus petit que 1.

et de déposition du sable. Nous pouvons donc réécrire le principe fondamental de la dynamique et l'intégrer sur plusieurs tours de piste.

#### 4.2.7 Intégration des équations du mouvement

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au patin donne :

$$m\ddot{y} = -mg + \mu_l Mg + B_0 v (h_n - y) + c(\langle M \rangle, c)(\dot{h}_n - \dot{y}). \quad (4.6)$$

De plus, nous avons :

$$h_{n+1} = \chi y \quad (4.7)$$

À titre d'illustration, on peut intégrer ce couple d'équation numériquement sur plusieurs tours. La figure 4.10 présente deux diagrammes spatio-temporels de la piste calculés pour deux vitesses différentes. Initialement la piste est lisse et le patin est au-dessus de celle-ci et ne transporte pas de sable. Sur le premier diagramme, la vitesse vaut  $v = 0.6 \text{ m.s}^{-1}$ , on remarque alors que la perturbation initiale (qui résulte de l'enfoncement du patin dans la piste au premier tour) est lissée au fur et à mesure que le patin passe sur la piste. Dans ce régime, la piste est stable. À plus haute vitesse ( $v = 1.2 \text{ m.s}^{-1}$ ) on constate que des rides se forment sur plusieurs tours à partir de la perturbation initiale (située ici au milieu de la piste). Nous avons d'ailleurs vérifié que l'état final (route ondulée ou route lisse) ne dépendait pas de la nature ou de la forme de cette perturbation initiale. Ces deux exemples semblent indiquer que notre modèle reproduit les observations expérimentales.

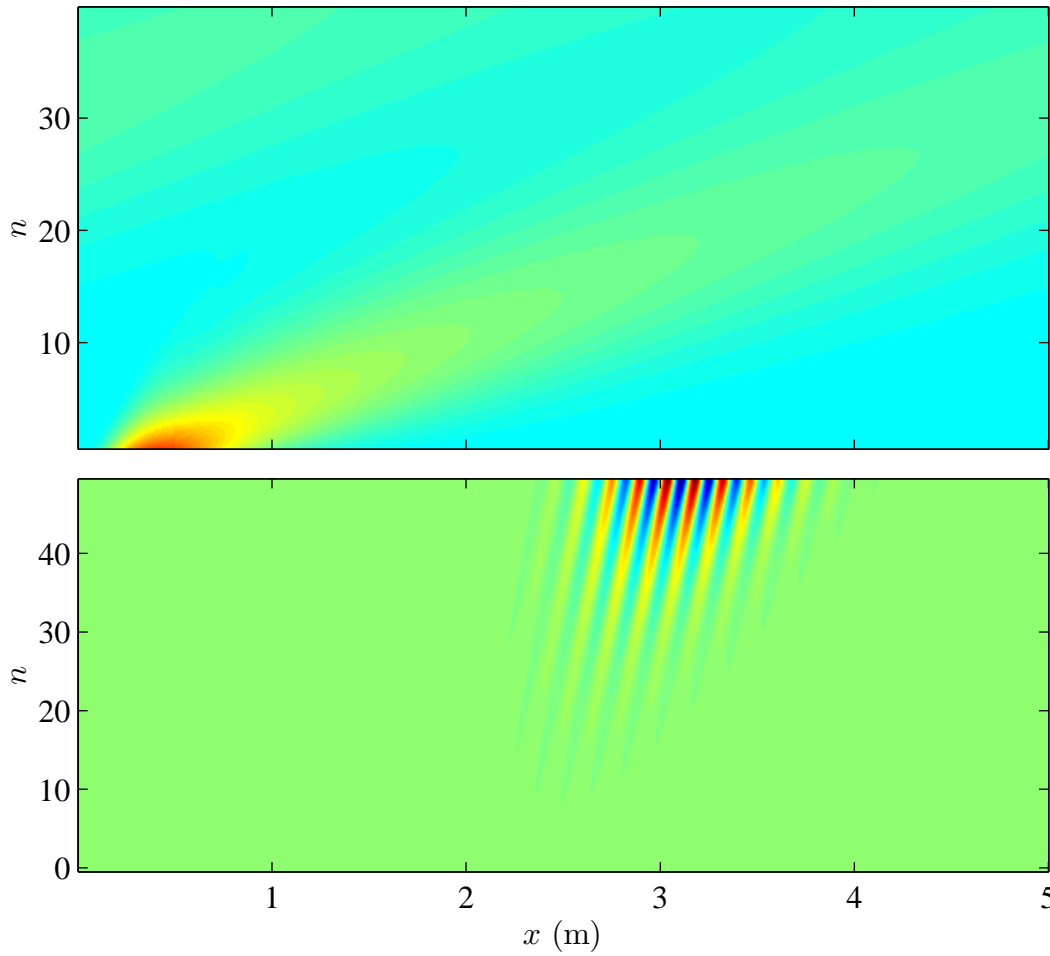


FIGURE 4.10 – **Diagrammes spatio-temporels de la piste.** En haut, pour une vitesse de  $0.6 \text{ m.s}^{-1}$  la piste est stable. En bas, pour une vitesse de  $1.2 \text{ m.s}^{-1}$  la piste est instable et des rides apparaissent au bout de plusieurs tours.

L'amplitude des rides croît exponentiellement et aucune saturation n'est observée. En effet, les équations intégrées sont linéaires : elles prédisent le seuil de vitesse et ne donne aucune information sur l'amplitude des rides. Il est possible de pousser un peu plus loin l'analyse du système modèle que nous avons construit en calculant analytiquement le taux de croissance des rides.

#### 4.2.8 Taux de croissance

À partir des équations 4.6 et 4.7 il est possible d'obtenir une expression analytique du taux de croissance des rides défini comme dans la partie 2.2 par :  $\sigma = \log \left( \frac{|h_{n+1}|}{|h_n|} \right)$ . Son expression en fonction du vecteur d'onde  $k$  est :

$$\sigma = \frac{1}{2} \log \left( \frac{(\alpha - \gamma k^2)^2 + (\beta k)^2}{(\alpha \chi - \gamma k^2)^2 + (\beta k - k^3)^2} \right) + \log \chi, \quad (4.8)$$

où les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  valent :  $\alpha = \mu L \rho \phi g / (mv^2)$ ,  $\beta = B_0 / (mv)$  et  $\gamma = C_0 L \rho \phi g \chi / (v + v_0)^2$ . Ce taux de croissance est tracé sur la figure 4.11 en fonction de la longueur d'onde et pour différentes vitesses d'un patin de 300 g.

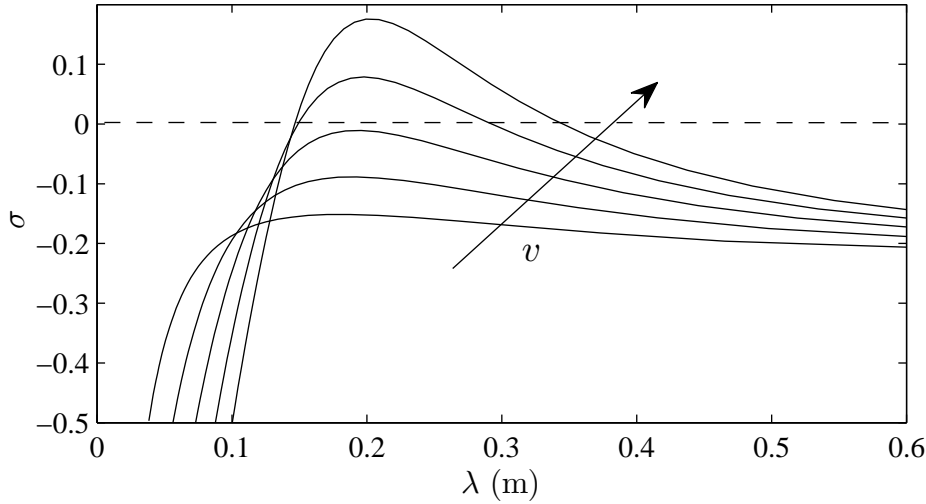


FIGURE 4.11 – **Taux de croissance des rides en fonction du vecteur d'onde**  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  tracé pour différentes vitesses. À faible vitesse, le taux de croissance est toujours négatif. À haute vitesse, il admet des valeurs positives. Le modèle prédit donc l'existence d'une vitesse critique et d'une longueur d'onde la plus instable.

On remarque tout d'abord que le taux de croissance a une allure identique à celui mesuré expérimentalement et numériquement dans la partie 2.2. À faible vitesse le taux de croissance est toujours négatif, signifiant que la piste est stable. Puis il existe une vitesse pour laquelle il admet des valeurs positives. Sur la figure 4.11, le taux de croissance semblent tendre vers une valeur négative pour les grandes longueurs d'onde. Ceci est uniquement dû au fait que le taux de croissance est tracé sur une faible gamme de longueurs d'onde (qui est celle à laquelle on accède expérimentalement). L'équation 4.8 prédit en effet que le taux de croissance tend vers 0 aux grandes longueurs d'onde.

On démontre ainsi, comme dans l'intégration du principe fondamental de la dynamique, qu'il existe une vitesse critique séparant les régimes route plate et route ondulée. De plus, on constate que l'instabilité se développe effectivement à haute vitesse et que la piste reste lisse à basse vitesse. La longueur d'onde la plus instable,  $\lambda$ , c'est-à-dire celle pour laquelle  $\sigma(\lambda, v_c) = 0$ , peut alors être calculée numériquement. Nous avons cherché une expression analytique de la vitesse critique et de la longueur d'onde. Cependant, lorsque l'on cherche à annuler la dérivée du taux de croissance par rapport à la vitesse on obtient une équation que l'on ne peut résoudre analytiquement. Nous avons alors calculé numériquement la vitesse critique et la longueur d'onde la plus instable à partir de l'expression du taux de croissance. La figure 4.12 présente ces résultats. Sur le graphe de gauche, les carrés rouges représentent la longueur d'onde mesurée expérimentalement tandis que la ligne noire symbolise la longueur d'onde la plus instable calculée à partir du modèle. À titre de comparaison, nous avons également superposé la

longueur d'onde calculée grâce au modèle simpliste de la partie 3.6 (courbe en pointillés gris). Nous pouvons constater que la longueur d'onde ne diffère pas beaucoup entre ces deux modèles à l'instar de la pulsation propre et de la pseudo-pulsation d'un pendule amorti. La longueur d'onde calculée avec le modèle complet est toutefois plus proche de celle mesurée expérimentalement.

Le graphe de droite de la figure 4.12 représente la vitesse critique du patin en fonction de sa masse. Les carrés rouges symbolisent ici aussi les relevés expérimentaux et la courbe en trait plein les résultats de notre analyse de stabilité linéaire. L'accord entre les mesures et le modèle est remarquable sachant qu'il n'y a aucun paramètre ajustable. La vitesse critique d'apparition des rides semble donc suivre une loi de puissance du type  $v_c \sim m^{0.35}$ . La valeur de l'exposant de cette loi de puissance (0.35) diffère légèrement de celui mesurée précédemment par Bitbol et al. [2009] qui était de 0.25. Cette différence est toutefois assez faible et n'est pas incompatible avec les données de Bitbol et al. [2009] qui repose uniquement sur six valeurs de la masse comprises entre 300 et 700 g.

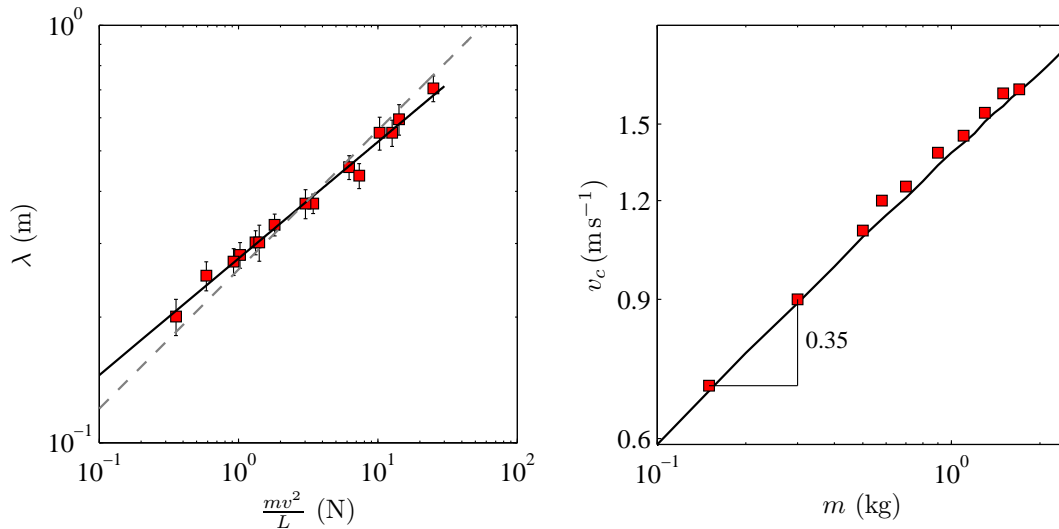


FIGURE 4.12 – **Longueur d'onde et vitesse critique prédites par le modèle.** À gauche, longueur d'onde des rides en fonction de  $\frac{mv^2}{L}$ . Les carrés rouges correspondent aux données expérimentales, la courbe en pointillés gris au premier modèle reposant sur les mesures de forces en régime stationnaire. La courbe noire en trait plein correspond à la longueur d'onde la plus instable prédite par l'analyse de stabilité linéaire complète. On remarque que le modèle complet se rapproche encore plus de la longueur d'onde expérimentale que le modèle simple. À droite, vitesse critique des rides en fonction de la masse du patin. Les carrés rouges correspondent aux données expérimentales et la ligne en trait plein à la valeur prédite par notre modèle. On observe là aussi un très bon accord.

### 4.3 Conclusions et perspectives

Finalement, la mesure de la force de portance agissant sur la plaque lorsque l'on soumet celle-ci à des perturbations sinusoïdales, nous a permis d'obtenir une expression complète de la force de portance. Bien que cette expression ait été validée dans des

gamme de vitesses et de masses restreintes (de  $0.1$  à  $2 \text{ m.s}^{-1}$  et de  $0.15$  à  $2 \text{ kg}$ ), elle permet de prédire correctement le comportement du patin lorsque celui-ci se déplace sur une piste lisse. Nous avons notamment identifié trois régimes dépendant de la vitesse et avons retrouvé le régime expérimental numéro 4, dans lequel le patin rebondit sur la piste dès le premier tour si la vitesse est supérieure à une vitesse  $v^*$ .

Ensuite, en mesurant le profil de la piste laissé par le patin derrière lui, nous avons pu mettre en évidence un coefficient d'efficacité à l'impression, noté  $\chi$ . Ce coefficient s'est révélé être constant dans les plages de vitesses et de longueurs d'onde explorées. Grâce à ce coefficient, nous avons pu faire le lien entre la trajectoire du patin au tour  $n$  et le profil de la piste au tour  $n + 1$  et ainsi, intégrer les équations de la dynamique sur plusieurs tours. Nous avons alors mis en évidence deux régimes. À basse vitesse la piste reste stable et les perturbations initiales sont lissées. À plus haute vitesse la piste se couvre tour après tour de rides. Notre modèle prédit donc l'existence d'une vitesse critique  $v_c$  et également le fait que le phénomène de tôle ondulée soit dû au passage répété de véhicule. En effet, nous avons  $v_c < v^*$ . Bien que la piste soit stable sur un tour le passage répété du véhicule finit par recouvrir celle-ci de rides. Ces résultats ont été retrouvés en calculant le taux de croissance des rides. Ce taux de croissance montre un bon accord qualitatif avec celui mesuré expérimentalement et numériquement. Il permet de plus de mettre en évidence la longueur d'onde la plus instable du système. Pour finir, la vitesse critique et la longueur d'onde des rides prédites par cette analyse de stabilité linéaire sont en excellent accord avec les mesures expérimentales. Nous avons donc clairement réussi à modéliser la dynamique de la plaque et la façon dont elle déforme la piste.

Cependant, il reste encore beaucoup à faire. Cette analyse de stabilité reste linéaire. Elle ne fournit aucun renseignement sur l'amplitude de saturation des rides. En rajoutant de manière *ad hoc* un terme non-linéaire (cubique) dans l'expression de la force de la force de portance il est possible d'obtenir une saturation des rides. On pourrait donc essayer de chercher des effets non-linéaires dans cette force de portance. Ceux-ci pourraient ensuite expliquer pourquoi l'instabilité suit une bifurcation super-critique.

De plus, sur le diagramme spatio-temporel de la figure 4.10, on remarque que les rides créées avancent. Elles migrent dans le sens de la circulation du patin. Cependant, dans le régime 2, qui est celui que l'on modélise ici, les rides devraient reculer. Ce désaccord peut être levé si l'on prend en compte la longueur  $L_0$  du sable transporté. En effet, si l'on suppose que le patin sent le profil de la piste en  $x + L_0$  (où  $L_0$  est une fonction de la masse de sable transportée) alors l'intégration numérique du principe fondamental de la dynamique donne un diagramme spatio-temporel dans lequel les rides reculent. La prise en compte de  $L_0$  permet d'introduire facilement un déphasage et retrouver le sens de migration des rides. Ainsi, le sens rétrograde de la migration des rides dans le régime 2 peut être interprété par le fait que le patin ressent le profil de la piste en avance par rapport à sa position.

Pour finir, ce travail a été réalisé dans le cas simplifié d'un patin évoluant sur un lit granulaire sec. Ce cas étant résolu, il est maintenant possible de se tourner vers des situations plus complexes.

## Troisième partie

### VERS UNE MODÉLISATION RÉALISTE





# Chapitre 1

## Interactions entre véhicules

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Motivations . . . . .</b>	<b>120</b>
<b>1.2</b>	<b>Interaction entre deux patins . . . . .</b>	<b>121</b>
1.2.1	Caractérisation des patins . . . . .	121
1.2.2	Patins côte à côte . . . . .	123
1.2.3	Patins de part et d'autre de la piste . . . . .	127
1.2.4	Modèle d'interaction ad hoc . . . . .	128
<b>1.3</b>	<b>Interaction entre N patins . . . . .</b>	<b>129</b>
1.3.1	Motifs observés . . . . .	129
1.3.2	Pulsation critique des patins . . . . .	131
1.3.3	Conclusion . . . . .	133

---

## 1.1 Motivations

Le mécanisme responsable de la tôle ondulée est bien compris dans le cas où un seul patin circule sur une route en sable. Cependant, une route réelle est soumise au passage de divers véhicules avec différentes masses et vitesses. De plus, si l'on regarde une piste en tôle ondulée comme celle de la figure 1.1 on constate que les rides s'étendent sur toute la largeur de la route. Nous nous sommes donc intéressés au cas où plusieurs patins circulaient en même temps sur la piste. Une seconde raison nous a également poussés à faire cette étude. En effet, Zoueshtiagh et Thomas [2000] ont étudié le comportement d'un lit de grains déposé sur le fond d'une table tournante et totalement immergé. Ils ont alors observé qu'en augmentant la vitesse de rotation de la table, des rides pouvaient se former à la surface du lit de grains. Le motif de rides se formait en spirale partant du centre de la cuve et allant jusqu'au bord extérieur. Cette expérience, dans laquelle de l'eau est en rotation au dessus d'un lit de grains, nous a alors inspiré la question suivante : quel serait le motif de rides si l'on avait une multitude de patins alignés selon un rayon de la piste ? La dynamique de l'eau dans l'expérience de Zoueshtiagh et Thomas [2000] serait ainsi remplacée par celle des patins désormais connu. Cette approche suggère un grand nombre de questions : si un patin situé vers l'extérieur de la piste est instable et tend à former des rides alors qu'un second patin situé à l'intérieur de la piste est stable, que se passe-t-il pour l'ensemble des patins ? Sont-ils tous stables ? Tous instables ?

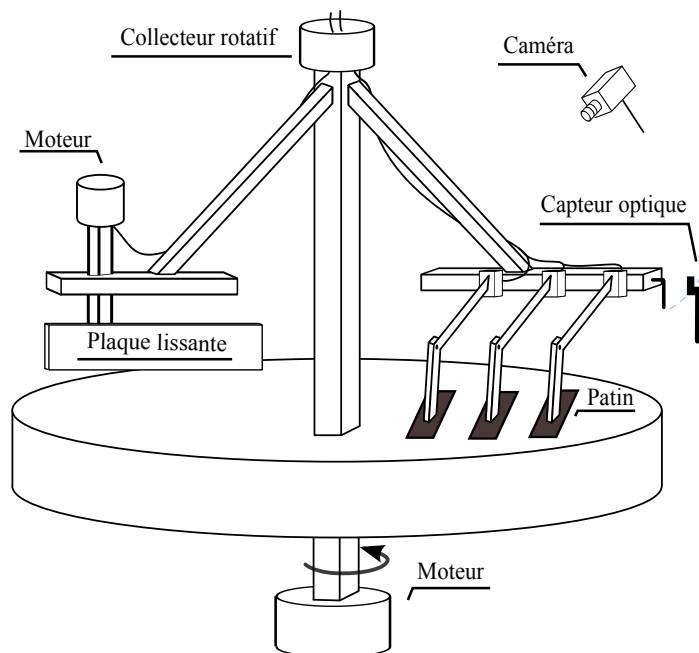


FIGURE 1.1 – **Dispositif expérimental permettant d'étudier le phénomène de tôle ondulée lorsque plusieurs patins sont sur la piste.** Les patins positionnés côte à côte sont alignés selon un rayon de la piste.

Afin de répondre à ces questions nous avons modifié le dispositif expérimental dans le but de pouvoir ajouter plusieurs patins sur la piste. Ces patins sont placés côte à côte et sont alignés selon un rayon de la piste comme indiqué sur le schéma de la figure 1.1.

Les patins ont une largeur de 4 cm et il est possible d'en placer jusqu'à douze selon un même rayon. Afin de mesurer l'altitude de chacun des patins nous les avons tous dotés d'un potentiomètre rotatif permettant de connaître leur orientation par rapport à l'horizontale. Les signaux fournis par ces potentiomètres sont ramenés autour de 0 V et amplifiés grâce à des amplificateurs opérationnels montés en soustracteur. Avant de réaliser une étude complète avec douze patins sur la piste, nous nous sommes intéressés au cas où deux patins seulement étaient présents.

## 1.2 Interaction entre deux patins

### 1.2.1 Caractérisation des patins

La première étape de l'étude de l'instabilité de tôle ondulée lorsque deux patins sont présents sur la piste a consisté à les placer côte à côte et à mesurer pour différents écarts radiaux la vitesse critique de l'instabilité. Concrètement, on fixe la position du patin le plus à l'extérieur de la piste. Ce patin extérieur a une trajectoire circulaire de rayon  $r = 77$  cm. On positionne le deuxième patin à une distance  $e$  du premier, ce patin intérieur effectue alors des tours de piste sur un rayon  $r - e$ . Afin de déterminer la vitesse critique de chaque patin, nous avons effectué des rampes de vitesses décroissantes à partir d'une vitesse au-delà du seuil. Il se trouve que pour les patins utilisés le régime de tôle ondulée noté 2, dans lequel le patin crée des rides tout en restant en contact avec la piste, est très étroit. Il est très délicat de rester dans ce régime et très souvent le patin saute d'une ride à l'autre. Nous avons donc choisi de commencer la rampe de vitesse directement dans le régime 3 sans se préoccuper du fait qu'initialement le patin saute sur les bosses. La figure 1.2 présente l'amplitude des rides formées par le patin extérieur seul au cours de trois rampes de vitesse, ainsi qu'un diagramme spatiotemporel de la piste au cours d'une des rampes. On constate que les trois rampes de vitesses fournissent des résultats semblables, l'amplitude des rides chute pour la même vitesse critique  $v = 1.20 \pm 0.025$  m.s<sup>-1</sup>. Dans toutes les expériences présentées dans ce chapitre, la piste est qualifiée de lisse si l'amplitude des rides, calculée à partir de l'écart-type du signal délivré par les potentiomètres rotatifs, est inférieure à 5 mm. Ce critère peut sembler assez élevé. En effet des rides d'une amplitude de 5 mm (soit 1 cm crête à crête) se distinguent clairement à l'oeil. Cependant, le signal délivré par les potentiomètres rotatifs est assez bruité<sup>1</sup> et le niveau de bruit correspond à des rides d'une amplitude d'environ 5 mm.

Sur le diagramme spatiotemporel de la figure 1.2 on aperçoit très clairement que la migration des rides ralentit au cours de la rampe et qu'elle change également de sens. Afin de caractériser la migration, nous avons mesuré la vitesse de dérive des rides en calculant la fonction de corrélation du profil de la piste entre le tour  $n$  et le tour  $n + 1$  :  $F(\delta x) = E(h_n(x)h_{n+1}(x + \delta x))$ , où  $E$  désigne l'espérance de la variable. La position du maximum de la fonction  $F$  donne le décalage des rides entre deux tours et donc leur vitesse de migration. Dans le chapitre 1, nous avons mentionné le fait que les rides avancent lorsque le patin saute d'une ride à l'autre et qu'elle reculent lorsque celui-ci est en contact avec la piste. La mesure de l'accélération du patin permet

---

1. Le bruit dans nos mesures provient essentiellement du moteur triphasé et de son alimentation.

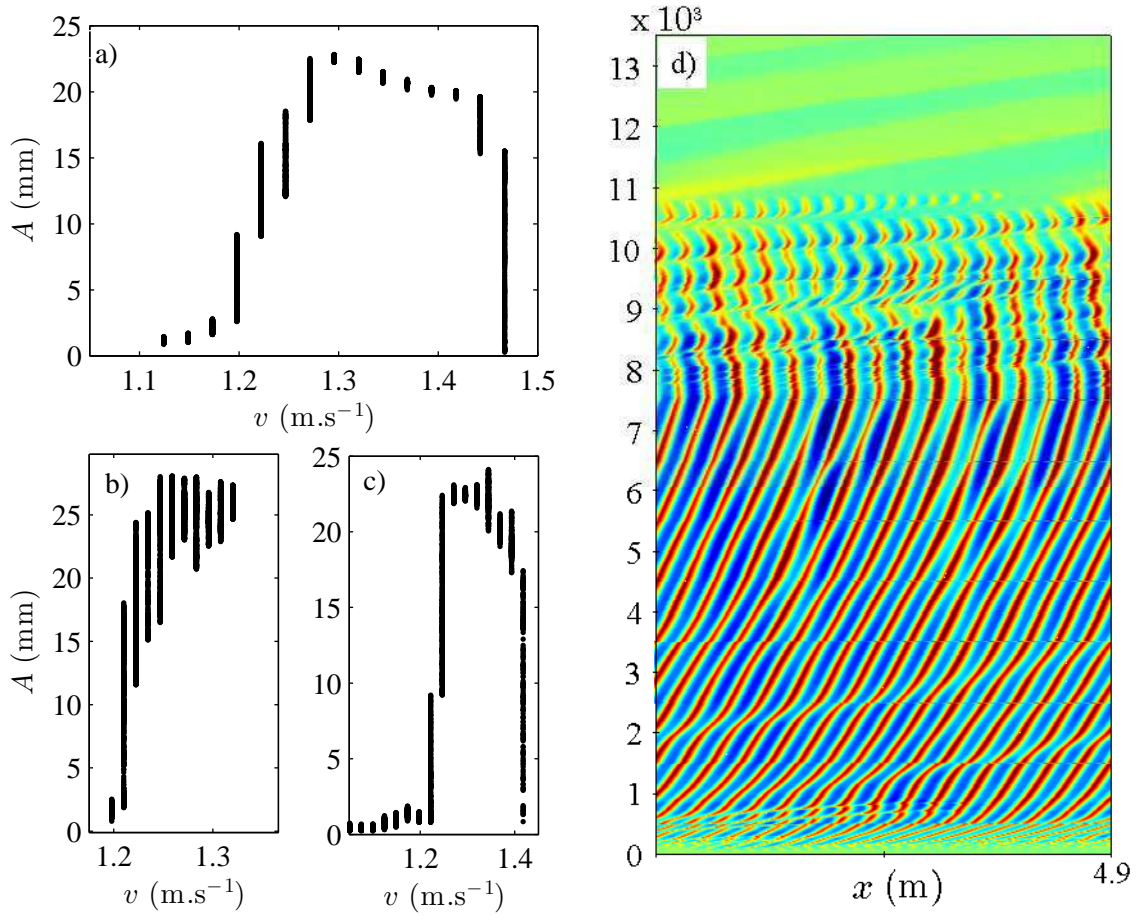


FIGURE 1.2 – **a) Amplitude des rides** alors que la vitesse du patin diminue de  $0.025 \text{ m.s}^{-1}$  tous les 1000 tours. **b) Amplitude des rides pour une rampe plus lente**, la vitesse diminuant de  $0.0125 \text{ m.s}^{-1}$  tous les 2000 tours. **c) Amplitude des rides lors d’une rampe plus rapide**, la vitesse diminuant de  $0.025 \text{ m.s}^{-1}$  tous les 500 tours. **d) Diagramme spatio-temporel de la piste** lors de l’expérience a). On aperçoit clairement que la migration des rides ralentit au cours de la rampe et qu’après 11000 tours les rides sont effacées.

de savoir si le patin saute ou non. Pour calculer l’accélération verticale maximale du patin,  $\gamma$ , il suffit de mesurer l’amplitude et la longueur d’onde des rides. On a alors, sous l’hypothèse d’un mouvement sinusoïdal :  $\gamma = A \left( \frac{2\pi v}{\lambda} \right)^2$ . La figure 1.3 présentent l’accélération  $\gamma$  et la vitesse de dérive des rides en fonction du nombre de tours effectués pendant l’expérience représentée sur la figure 1.2d). On peut remarquer que lorsque l’accélération est supérieure à l’accélération de la pesanteur  $g$  alors les rides avancent, et dès que  $\gamma$  passe sous le seuil de  $g$  alors les rides reculent. On retrouve ici les observations que nous avons décrites au chapitre précédent. À haute vitesse, l’accélération verticale du patin est supérieure à  $g$  et donc le patin saute d’une ride à l’autre, le patin est dans le régime 3. Dans ce cas les rides avancent. Lorsque l’accélération du patin est toujours plus faible que  $g$ , le patin reste toujours en contact avec la piste. Le patin se situe dans le régime 2, et alors les rides reculent.

Les rampes que l’on effectue permettent donc de mesurer avec précision la vitesse critique d’apparition des rides. Mais avant de rajouter un second patin sur la piste,

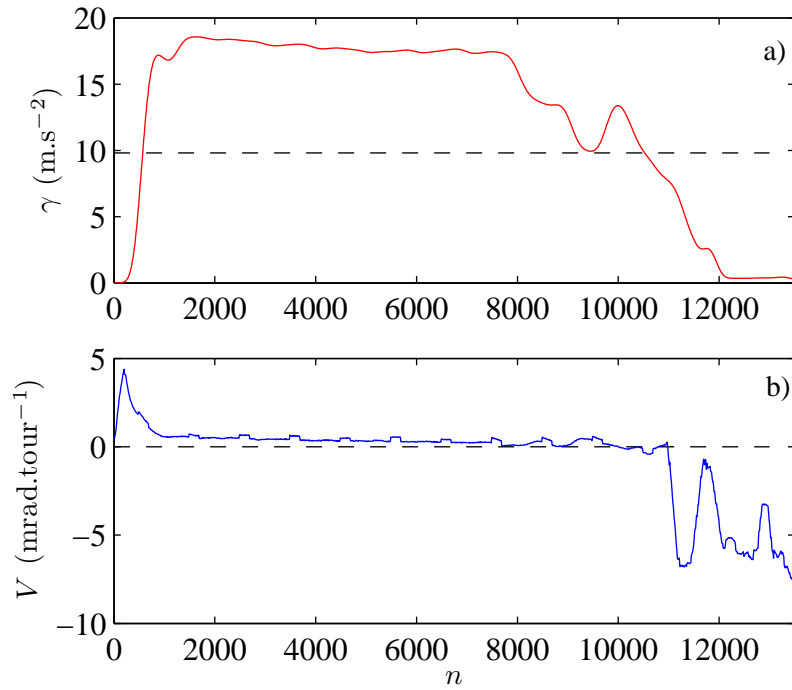


FIGURE 1.3 – **a) Accélération verticale maximale du patin au cours d’une rampe de vitesse.** Celle-ci augmente le temps que les rides se forment puis diminue lentement au fur et à mesure que la vitesse  $v$  diminue jusqu’à devenir inférieure à  $g$ . **b) Vitesse de migration des rides,** on constate qu’elle est du même signe que  $\gamma - g$ . Les petits « sursauts » réguliers que l’on observe coïncident avec les changements de vitesse de rotation du bras.

nous avons vérifié que cette vitesse ne dépendait pas de la position radiale du patin sur la piste. L’expérience précédente a été répétée, avec  $r = 51, 61, 68$  et  $73 \text{ m.s}^{-1}$ . La figure 1.4 présente les résultats des rampes effectuées. On constate que la vitesse critique n’est pas changée lorsque l’on change la position radiale du patin. Ceci montre que la courbure de la piste n’intervient pas dans les résultats de notre expérience de tôle ondulée.

### 1.2.2 Patins côte à côte

Une fois ces expériences préliminaires effectuées, nous avons rajouté un second patin sur la piste. Les deux patins n’ont bien sûr pas la même vitesse linéaire  $v$ . Cependant, ils ont la même vitesse de rotation (ou pulsation)  $\Omega$ . Pour des raisons de commodité, nous représenterons les données en fonction de  $v$  ou de  $\Omega$ . Ainsi, la figure 1.5 présente deux exemples de rampes identiques pour deux positions différentes du patin intérieur (71 et 61 cm) (on rappelle que le patin extérieur a une position radiale fixe de  $r = 77 \text{ cm}$ ). Sur cette figure on constate que lorsque les deux patins sont proches ( $e = 6 \text{ cm}$ ), ceux-ci ont la même pulsation critique. On peut donc supposer qu’ils se *voient* l’un l’autre. À l’inverse pour un écartement plus important ( $e = 16 \text{ cm}$ ) les deux patins n’ont plus la même pulsation critique. Ainsi, chacun retrouve alors sa vitesse critique

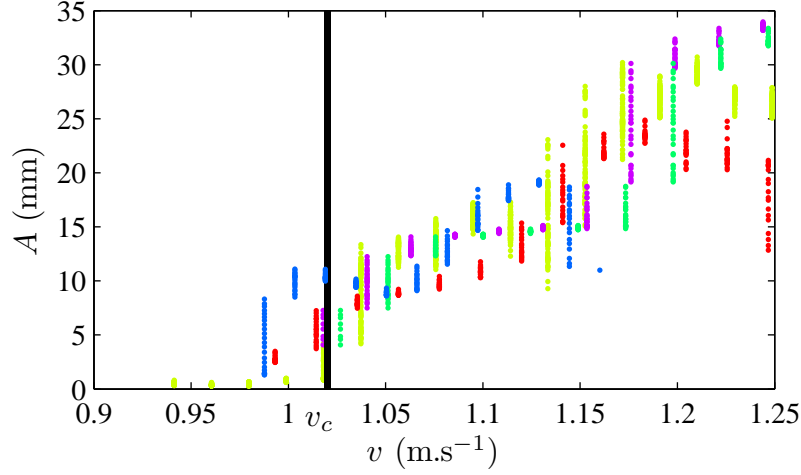


FIGURE 1.4 – **Amplitude des rides créées par un unique patin en fonction de sa vitesse.** Les différentes courbes correspondent à différentes positions sur la piste. Le trait noir symbolise le seuil de l'instabilité que l'on a repéré à  $v_c = 1.02 \text{ m.s}^{-1}$ . Cette vitesse critique est différente de celle mesuré précédemment (figure 1.2) car il ne s'agit pas du même patin.

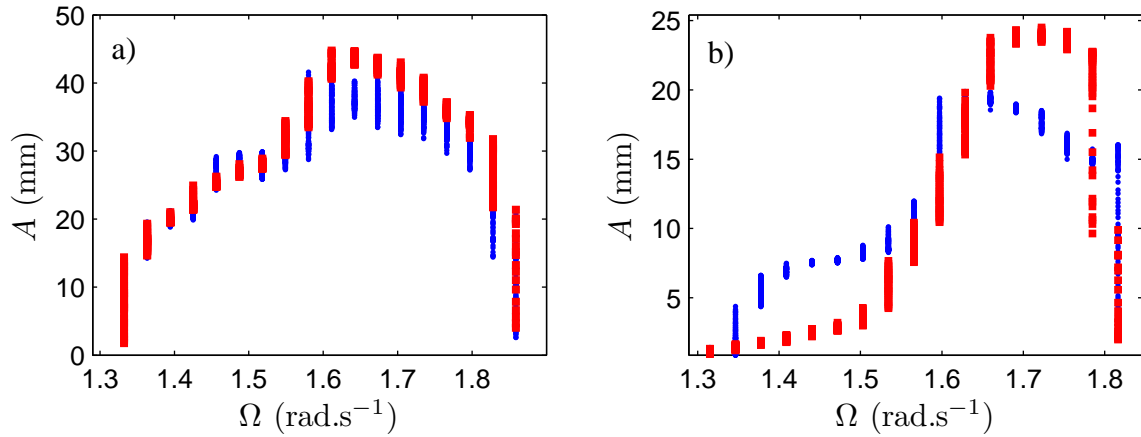


FIGURE 1.5 – **Comparaison de deux rampes pour des distances  $e$  différentes.** a) En rouge, amplitude du mouvement du patin intérieur ( $r - e = 71 \text{ cm}$ ) en fonction de la vitesse de rotation du bras central. En bleu, amplitude du mouvement du patin extérieur. Les deux patins ont une même vitesse de rotation critique. b) En rouge, amplitude du mouvement du patin intérieur ( $r - e = 61 \text{ cm}$ ) en fonction de la vitesse de rotation du bras central. En bleu, amplitude du mouvement du patin extérieur. Les deux patins ne sont plus couplés et n'ont plus la même pulsation critique.



naturelle, c'est-à-dire celle qu'il avait lorsqu'il était seul sur la piste.

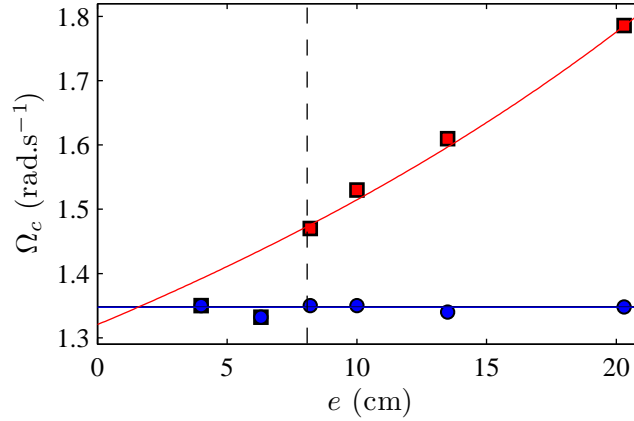


FIGURE 1.6 – Pulsations critiques des deux patins en fonction de l'écartement  $e$ . Les ronds bleus symbolisent le patin extérieur et les carrés rouges le patin intérieur. Les deux courbes en traits pleins correspondent aux pulsations critiques qu'auraient les patins s'ils avaient été seuls sur la piste.

Ce type d'expériences a été renouvelé pour différents écartements entre les patins. La figure 1.6 présente la pulsation critique des deux patins en fonction de leur écartement. Grâce à cette figure, on peut remarquer que lorsque l'écart entre les deux patins est inférieur à 8 cm, ceux-ci sont couplés et ont la même pulsation critique. Ceci signifie que le patin intérieur continue à être instable même pour des vitesses inférieures à sa vitesse critique. Lorsque l'écartement entre les deux patins est supérieur à 8 cm, les patins sont complètement découplés et chacun retrouve le comportement qu'il aurait eu s'il avait été seul sur la piste. Ce comportement est symbolisé par les courbes en traits pleins sur la figure 1.6. Ils représentent la pulsation critique qu'auraient les patins si chacun était seul sur la piste, celle du patin extérieur est constante car il se trouve toujours à la même position radiale. Celle du patin intérieur évolue en :  $r/(r - e)$ . Si ces deux courbes n'ont pas la même ordonnée à l'origine, c'est parce que les deux patins ne sont pas rigoureusement identiques. Malgré toutes les précautions que nous avons prises lors de leur usinage ils n'ont pas exactement la même vitesse critique. Finalement, lorsque les deux patins sont espacés d'une distance inférieure à 8 cm ils se synchronisent pour avoir la même pulsation critique.

Nous avons ensuite voulu étudier les conséquences d'une augmentation de la portée de l'interaction entre deux patins. Pour cela nous avons rajouté une masse sur le patin extérieur. L'ajout d'une masse augmente la vitesse critique du véhicule comme nous l'avons vu dans la partie 4.2. Elle augmente également la longueur d'onde des rides et donc leur amplitude peut être plus importante. On s'attend alors à ce que la distance d'interaction soit augmentée. La figure 1.7 présente la vitesse critique et la pulsation critique des deux patins en fonction de leur écartement. Le patin extérieur est toujours à une position  $r = 77$  cm et la masse qui lui a été rajoutée est de 700 g (sa masse initiale étant de 120 g). Les courbes en traits pleins sur la figure 1.7 symbolisent ici aussi le comportement attendu pour les patins lorsque ceux-ci sont seuls sur la piste.

On remarque que le comportement du système est différent de ce que l'on observait précédemment. Pour un écart radial inférieur à 5 cm les deux patins ont la même pulsation critique. Cependant, il faut écarter les patins de plus de 20 cm pour qu'ils soient complètement isolés l'un de l'autre. On remarque également que le patin extérieur n'est quasiment pas perturbé par la présence du patin intérieur. Sa vitesse critique est constante à 5% près quelle que soit la position du patin intérieur. À l'inverse la vitesse critique du patin intérieur passe de  $1.44 \text{ m.s}^{-1}$  pour un écart de 3 cm à  $1.05 \text{ m.s}^{-1}$  pour un écart de 20 cm. Ainsi lorsque les deux patins sont proches, l'ajout d'une masse sur le patin extérieur stabilise le patin intérieur. Celui-ci peut circuler à des vitesses supérieures à sa vitesse critique sans pour autant créer de rides. Peut-être pourrait-on chercher ici un moyen pour limiter l'apparition de la tôle ondulée sur les routes.

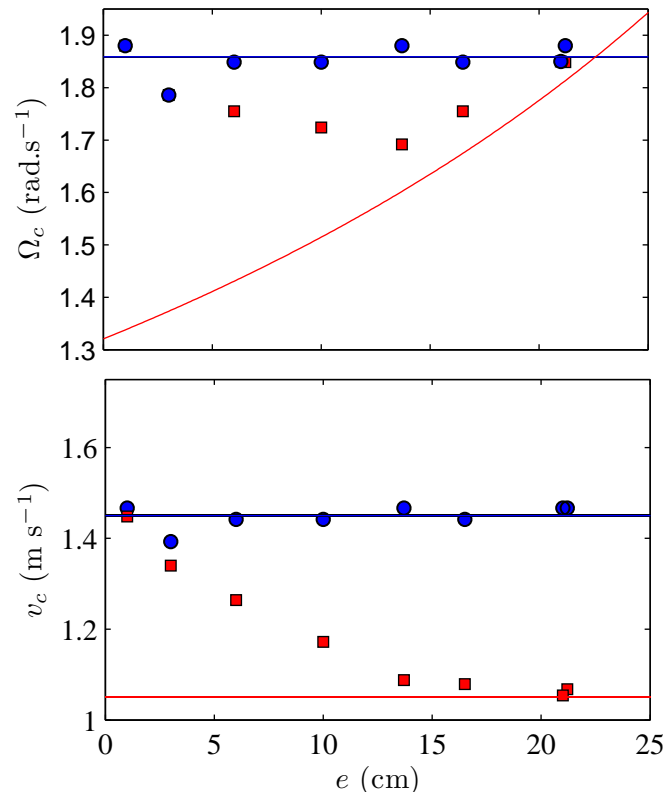


FIGURE 1.7 – **En haut, pulsation critique des patins** (carrés rouges : patin extérieur, ronds bleus : patin intérieur) en fonction de l'écartement les séparant. Le patin extérieur est situé à un rayon de 77 cm. **En bas, vitesse critique des patins** (la même convention a été utilisée pour distinguer les patins extérieur et intérieur). Les courbes en traits pleins correspondent au comportement qu'auraient les patins s'ils avaient été seuls sur la piste. On remarque que pour des écarts inférieurs à 5 cm les patins ont les mêmes pulsations critiques. Le patin extérieur n'est pas perturbé par la présence du patin intérieur et garde toujours la même vitesse, tandis que le patin intérieur à une vitesse critique qui diminue avec l'écartement  $e$ .

Il est désormais clair que faire circuler deux patins côte à côte modifie la stabilité de la piste. Cependant, on peut se demander s'il en serait de même si les patins n'étaient

pas alignés selon un même rayon. En effet, lorsqu'ils sont côte à côte, les patins interagissent non seulement via le profil qu'ils impriment dans la piste mais également via le sable que chacun éjecte sur ses côtés et qu'ils échangent.

### 1.2.3 Patins de part et d'autre de la piste

Nous avons alors modifié quelque peu la disposition des deux patins en les plaçant sur chacun des bras de l'expérience. Les patins se retrouvent diamétralement opposés, et ne sont alors uniquement couplés que par le profil qu'ils impriment sur la piste. Dans cette configuration les patins peuvent de plus avoir un écartement nul entre eux, en les faisant circuler au même rayon. Les mêmes expériences qu'au paragraphe précédent ont été réalisées. On a mesuré la vitesse et la pulsation critique des deux patins en fonction de leur écartement. La figure 1.8 résume les résultats obtenus. Nous voyons une fois encore que les pulsations des deux patins sont les mêmes pour des écarts inférieurs à 8 cm. Les patins ont été changés par rapport à l'expérience précédente et ont désormais la même vitesse critique. Il est rassurant de constater que lorsque l'écart entre les deux patins est nul alors ils retrouvent leur vitesse critique naturelle. La vitesse critique ne dépend donc pas du flux de voitures contrairement à ce qu'avait annoncé Kurtze et al. [2001].

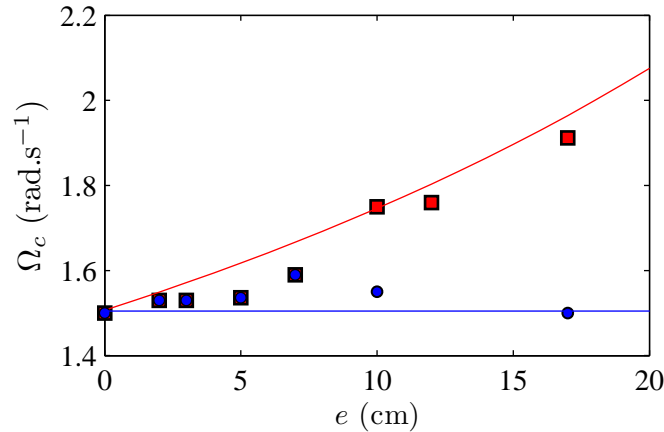


FIGURE 1.8 – Pulsations critiques des deux patins en fonction de l'écartement  $e$  lorsque ceux-ci sont placés sur des bras opposés. Les ronds bleus symbolisent le patin extérieur et les carrés rouges le patin intérieur. Les deux courbes en traits pleins correspondent aux pulsations critiques qu'auraient les patins s'ils avaient été seuls sur la piste.

Pour des valeurs de  $e$  comprises entre 1 et 8 cm les patins ont la même pulsation critique, mais contrairement à l'expérience précédente, la pulsation critique commune a une valeur intermédiaire entre les pulsations critiques naturelles des patins. Le patin extérieur est, dans cette configuration, sensible à la présence du patin intérieur. L'influence de chaque patin semble plus équilibrée lorsqu'ils sont placés sur chacun des bras et non côte à côte.

Nous avons vu dans la partie 4.2 que le modèle de stabilité linéaire que nous avons construit permettait de prédire quantitativement la vitesse critique de l'instabilité. Nous nous sommes alors demandé s'il était possible de prédire le comportement de deux patins circulant sur la piste comme dans les expériences.

### 1.2.4 Modèle d'interaction ad hoc

Nous avons repris les équations établies dans la partie 4.2 et les avons appliquées aux deux patins, les variables sont alors indicées par <sup>e</sup> (respectivement <sup>i</sup>) lorsqu'elles correspondent au patin extérieur (respectivement intérieur).

$$\begin{cases} m\ddot{y}^e = -mg + \mu_l M^e g + B_0 v^e (h_n^e - y^e) + c(M, v^e)(\dot{h}_n^e - \dot{y}^e) \\ m\ddot{y}^i = -mg + \mu_l M^i g + B_0 v^i (h_n^i - y^i) + c(M, v^i)(\dot{h}_n^i - \dot{y}^i) \\ h_{n+1}^i = \chi y^i \\ h_{n+1}^e = \chi y^e \end{cases} \quad (1.1)$$

Les vitesses  $v^e$  et  $v^i$  sont liées par la relation :  $v_i = (r - e)v^e/r$ . Ainsi reformulée, les équations ne sont pas encore couplées et en les intégrant on retrouve le comportement habituel des patins.

Puisque dans l'expérience où les patins sont de part et d'autre de la piste ceux-ci n'interagissent que via le profil de la piste, nous avons introduit un couplage entre les profils  $h_n^e$  et  $h_n^i$ . Ce couplage *ad hoc* veut modéliser le fait que du sable peut être échangé entre les pistes sous les patins. Ainsi, de la manière la plus simple mathématiquement, le profil  $h_n^e$  sera modifié d'une quantité proportionnelle à  $h_n^i - h_n^e$ . Nous introduisons alors la constante de couplage  $C$ , tel que  $h_n^e$  soit modifié de  $C(h_n^i - h_n^e)$ . Cette constante doit vérifier quelques propriétés. Elle doit être positive, car si  $h_n^i > h_n^e$  alors du sable s'écoule de la piste intérieure vers la piste extérieure dont l'altitude est donc augmentée. Cette constante doit dépendre de l'écartement entre les deux patins et doit être une fonction décroissante de cet écartement. En effet, nous avons constaté qu'en dessous d'une dizaine de centimètres les deux patins étaient couplés alors qu'au delà les deux patins ne se voient pas. Pour finir, la valeur maximale de  $C$  doit être 1 : en effet, si  $C$  était plus grand que 1, alors le profil le plus bas deviendrait le profil le plus haut par simple transfert de sable ce qui ne serait pas physique. Nous avons alors testé deux expressions littérales pour  $C$  :

$$\begin{cases} C = \exp(-e/e_0) \\ C = 1 - e/e_0 \text{ si } e < e_0 \text{ et } C = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (1.2)$$

La première est un couplage qui décroît exponentiellement avec un écartement caractéristique  $e_0$  tandis que le second couplage est linéaire de  $e = 0$  à  $e = e_0$  puis est nul. Bien que ce couplage soit très simpliste, il permet d'introduire une portée typique d'interaction  $e_0$ . Nous avons donc modifié les équations en remplaçant  $h_n^e$  et ses dérivées (respectivement  $h_n^i$  et ses dérivées) par  $h_n^e + C(e)(h_n^i - h_n^e)$  (respectivement par  $h_n^i - C(e)(h_n^i - h_n^e)$ ). Nous avons ensuite intégré numériquement les équations ainsi modifiées pour différentes vitesses du patin extérieur et différents écarts  $e$ . Nous avons alors accès à la trajectoire des patins sur plusieurs tours et tout comme dans l'expérience, l'amplitude de leur mouvement nous permet de savoir si la piste est ondulée ou

non. La figure 1.9 présente la pulsation critique trouvée grâce à ce modèle très simple pour les deux constantes de couplage testées.

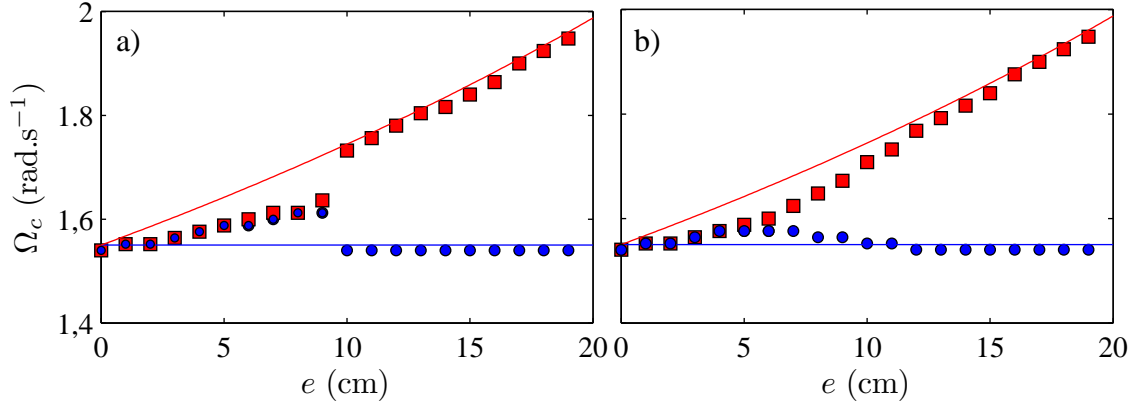


FIGURE 1.9 – **Pulsation critique des patins extérieur et intérieur en fonction de l'écartement les séparant.** a) Résultat de l'intégration des équations où l'on a utilisé une constante de couplage linéaire sur une distance caractéristique  $e_0=9$  cm. b) Résultat de l'intégration des équations où l'on a utilisé une constante de couplage exponentielle avec un écart caractéristique  $e_0 = 2$  cm. Les courbes en traits pleins représentent comme précédemment les pulsations critiques qu'auraient eues patins s'ils avaient été seuls sur la piste. Dans ces deux cas, on retrouve des résultats très similaires aux expériences.

On remarque qu'avec les deux expressions de la constante de couplage  $C$  on retrouve des résultats similaires aux expériences. Lorsque les patins sont proches, c'est-à-dire à une distance inférieure à  $e_0$  (ou quelques  $e_0$  pour le couplage exponentiel) les deux patins sont synchronisés et ont la même pulsation critique. À plus grandes distances, les deux patins retrouvent leur comportement de patin isolé. Il semble donc que l'on a réussi, grâce à ce couplage linéaire entre les pistes, à reproduire les caractéristiques que l'on observait expérimentalement. Il faut toutefois garder en mémoire que ce couplage *ad hoc* ne repose sur aucune mesure directe de l'échange de grains entre les pistes.

En conclusion, nous avons donc caractérisé le comportement de deux patins circulant simultanément sur la piste. Nous avons vu qu'ils se synchronisaient dès qu'ils étaient proches. La question qui se pose alors est : que se passe-t-il lorsqu'il y a plus de deux patins en interaction ? Ceci fait l'objet des paragraphes suivants.

## 1.3 Interaction entre N patins

### 1.3.1 Motifs observés

Douze patins identiques ont été placés sur un des bras de l'expérience. L'écart entre ces patins a été gardé constant et valait  $e = 4.5$  cm. On s'attend alors à ce qu'ils soient tous synchronisés comme c'est le cas pour deux patins. Les patins sont numérotés de 1 à 12 en partant du patin extérieur. Ainsi, le patin 1 est à la distance  $r = 77$  cm du centre et le patin 12 à  $r - 12e = 23$  cm du centre. Afin de représenter les rides formées sur la piste, un diagramme spatiotemporel comme celui de la figure 1.2 ne suffit pas,

il faudrait en tracer un pour chacun patin. Nous avons préféré une représentation en trois dimensions de la piste à un instant donné. La figure 1.10 donne un exemple de cette représentation pour une vitesse de rotation  $\Omega = 1.92 \text{ rad.s}^{-1}$ . Celle-ci est mise en parallèle d'une photographie de la piste au même instant. On constate que grâce aux potentiomètres rotatifs présents sur chaque patin il est possible de reconstruire l'allure de cette dernière. On peut alors observer que les rides sont plus marquées à l'extérieur de la piste tandis que l'intérieur est quasiment lisse. Bien que les patins soient tous à une distance inférieure à 8 cm, ils ne sont pas tous instables et n'ont donc pas la même pulsation critique. La structure des rides est également remarquable. Contrairement à ce qu'observent Zoueshtiagh et Thomas [2000] où les rides créées par un écoulement d'eau s'ajustent sur un motif en spirale, les rides créées ici sont radiales. Ainsi, il n'y a aucun déphasage entre les patins. Nous avons ensuite augmenté la distance séparant les patins. Tant que l'écartement entre les patins reste inférieur à 9 cm, les patins sont toujours en phase. Pour un écartement plus important, les patins ne sont plus couplés et le motif ne présente aucune cohérence radiale.

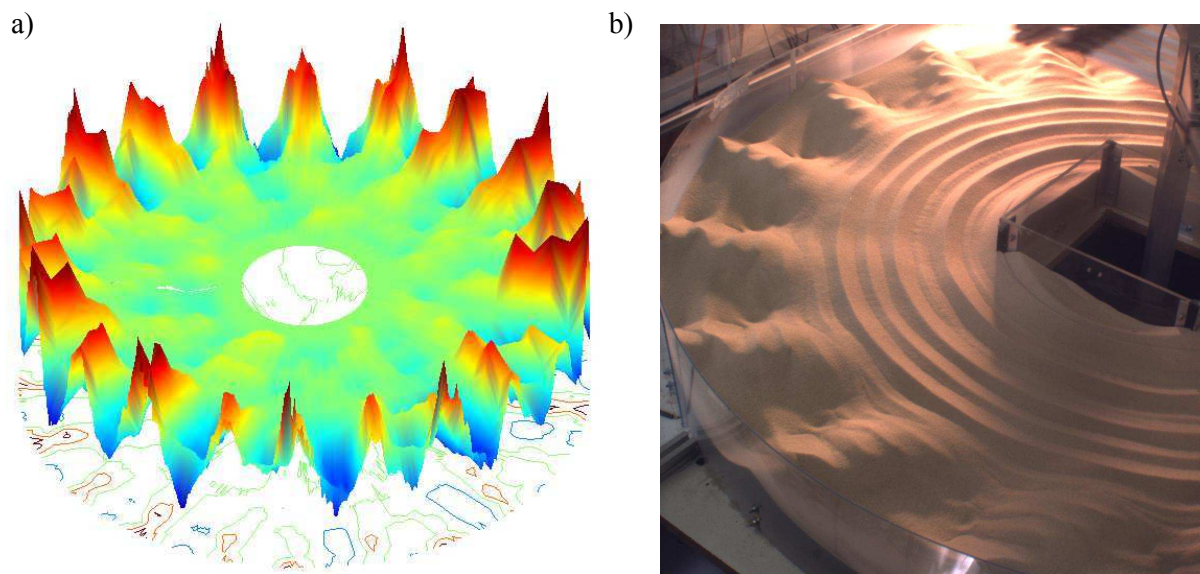


FIGURE 1.10 – a) **Représentation de la piste obtenue à partir de la position des douze patins** présents sur la piste au 116<sup>ième</sup> tour et pour une vitesse de rotation du bras de  $1.92 \text{ rad.s}^{-1}$  soit une vitesse d'environ  $1.2 \text{ m.s}^{-1}$  pour le patin extérieur. On note que les rides les plus à l'extérieur de la piste ont une amplitude bien plus grande que celles à l'intérieur. b) **Photographie de la piste** prise au 116<sup>ième</sup> tour.

### 1.3.2 Pulsation critique des patins

Des rampes de vitesse similaires à celles du paragraphe précédent ont été réalisées (vitesse initiale au dessus du seuil puis diminution de  $0.025 \text{ m.s}^{-1}$  tous les 1000 tours). La figure 1.11a) présente l'amplitude des rides en fonction du nombre de tours effectués pour les huit patins les plus à l'extérieur. Les quatre patins les plus à l'intérieur ont toujours été stables et nous ne les avons donc pas étudié dans le détail. Les trois patins extérieurs déstabilisent fortement la piste et forment des rides tandis que les autres patins présentent un mouvement avec une amplitude environ cinq fois plus faible. Les amplitudes des rides retombent quasiment à zéro pour un même nombre de tour, ceci signifie que les patins instables ont la même pulsation critique. On peut comparer ceci au cas dans lequel les patins sont seuls sur la piste. Pour cela, nous avons relancé plusieurs fois la même expérience en soulevant les patins pour qu'il n'en reste plus qu'un seul sur la piste (nous avons réalisé ce protocole pour les six patins les plus à l'extérieur). Ainsi, la figure 1.11b) présente l'amplitude du mouvement des six patins les plus à l'extérieur lorsque chacun d'eux est seul sur la piste. Pour ce type d'expériences on retrouve les résultats du paragraphe précédent : la piste devient stable dès que chaque patin a une vitesse inférieure à sa vitesse critique. L'exemple le plus frappant est celui du troisième patin (courbe verte sur la figure 1.11), celui-ci a une pulsation critique de  $1.8 \text{ rad.s}^{-1}$  lorsqu'il est seul sur la piste, mais sa pulsation critique tombe à  $1.53 \text{ rad.s}^{-1}$  lorsqu'il est couplé aux onze autres patins.

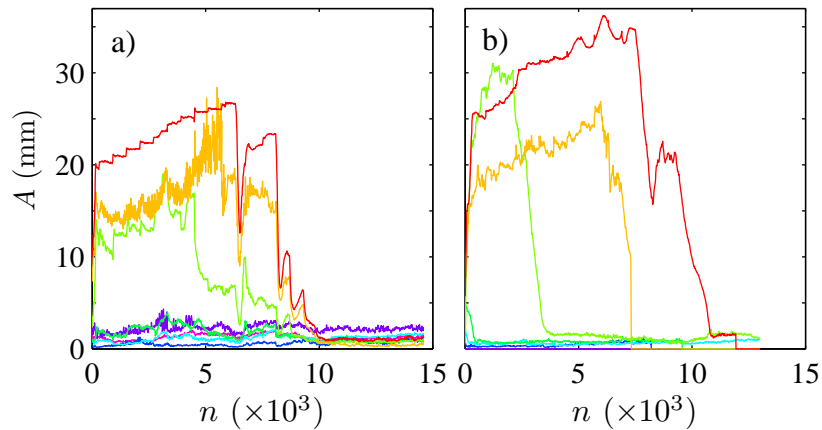


FIGURE 1.11 – a) Amplitude des rides en fonction du nombre de tour pour les différents patins lorsque ceux-ci sont tous présents sur la piste. b) Amplitude des rides en fonction du nombre de tours pour les différents patins pris séparément seuls sur la piste.

L'écart de pulsation critique  $\Delta\Omega_c$  entre la pulsation critique d'un patin lorsqu'il est avec d'autres sur la piste et lorsqu'il est seul, constitue donc une observable qui permet de quantifier le couplage entre les patins. Plus cette quantité est grande et plus les patins sont couplés. Nous avons alors réalisé différentes expériences avec des écartements plus importants entre les patins, ce qui implique qu'il a fallu réduire le



nombre de patins. Le patin extérieur est toujours à la même position et les écartements étudiés ont été de 4.5, 6.5, 9 et 12 cm. Pour chaque écartement nous avons mesuré la pulsation critique de chaque patin lorsque celui-ci est seul sur la piste et sa pulsation critique lorsque les autres patins sont sur la piste. La mesure de la pulsation critique a été réalisée comme précédemment en effectuant des rampes de vitesse. Ceci nous a conduit à réaliser une vingtaine de rampes chacune durant une dizaine d'heures. Le résultat de ces expériences est reproduit sur la figure 1.12 où est représenté  $\Delta\Omega_c$  en fonction de la distance du patin  $n$  au patin extérieur  $(n-1)e$ . Les différents symboles

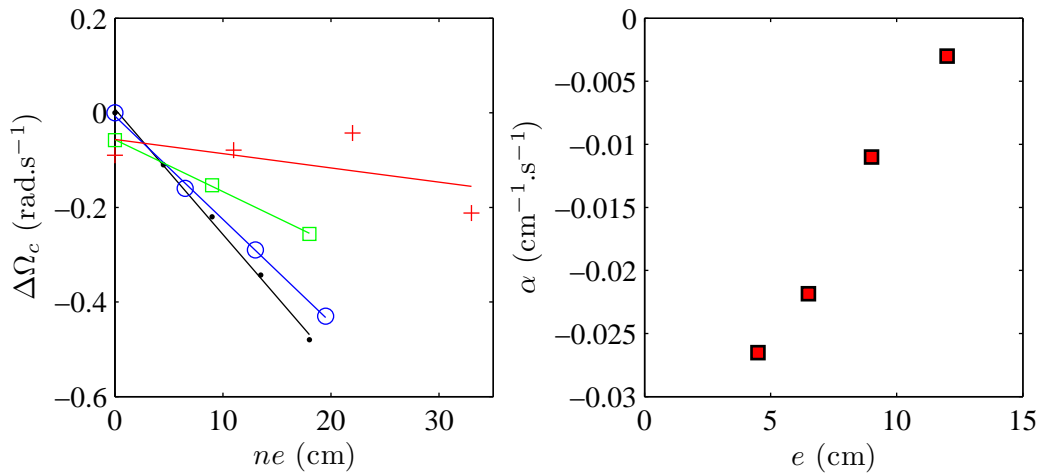


FIGURE 1.12 – a) **Différence de pulsation critique  $\Delta\Omega_c$  du patin  $n$  en fonction de sa distance au patin extérieur  $(n-1)e$ .** Les différents symboles correspondent à différents écartements entre les patins. Dans chacun des cas, on peut approximer  $\Delta\Omega_c$  par une droite de pente  $\alpha$  ( $\cdot$   $e = 4.5$  cm,  $\circ$   $e = 6$  cm,  $\square$   $e = 9$  cm,  $+$   $e = 12$  cm). b) **Pente  $\alpha$  en fonction de la distance séparant les patins.** Celle-ci permet de quantifier le couplage entre les patins.

de la figure 1.12a) correspondent aux différents écartements. On remarque alors que  $\Delta\Omega_c$  est toujours négatif. Ceci signifie que les patins les plus à l'intérieur de la piste sont instables à des vitesses plus faibles que leur vitesse critique naturelle (i.e. lorsqu'ils sont seuls sur la piste). Il est également remarquable que  $\Delta\Omega_c$  pour le patin extérieur soit toujours nul, a priori le patin le plus instable impose son comportement aux autres. Pour un écartement donné,  $\Delta\Omega_c$  est une fonction linéaire de  $n$ . Ceci est vrai uniquement pour les patins qui ont été déstabilisés. On ne peut pas définir  $\Delta\Omega_c$  pour les patins n'ayant pas formé de rides pendant la rampe de vitesse (concrètement on est limité par la vitesse de rotation du bras que l'on peut raisonnablement appliquer<sup>2</sup>). On peut définir le coefficient de proportionnalité  $\alpha$  entre  $\Delta\Omega_c$  et  $(n-1)e$  qui quantifie l'intensité

2. Lorsque plus de deux patins sautent sur la piste, les vibrations des bras et de l'axe central sont très importantes. Ces vibrations ont provoqué une nuit le dévissage de certains boulons fixant le support sur lequel étaient attachés les patins. Celui-ci est alors tombé et s'est retrouvé uniquement raccordé à l'axe central via les câbles de mesure. L'ensemble tournant à plus de  $2 \text{ rad.s}^{-1}$ , tous les patins ainsi que les bords de la cuve contenant le sable et quelques instruments se trouvant autour de l'expérience ont été entièrement détruits. Dès lors, nous avons été très prudents quant au serrage des vis de fixation et à la vitesse de rotation maximale des bras.



du couplage. La figure 1.12b) représente  $\alpha$  en fonction de l'écartement  $e$ . Celui-ci est négatif et est une fonction croissante de  $e$ . On remarque qu'en extrapolant les données,  $\alpha$  est nul pour un écartement d'environ 11 cm. Le coefficient  $\alpha$  est directement l'image du couplage entre les patins. On remarque alors que  $\alpha$  tend vers 0 lorsque  $e$  augmente à l'instar de la constante de couplage que nous avons introduite dans notre modélisation des deux patins. D'ailleurs l'allure de  $\alpha$  ressemble à la constante de couplage linéaire de l'équation 1.2 qui n'était finalement pas si simpliste qu'on aurait pu penser.

Jusqu'à présent tous les patins étaient identiques. Dans l'objectif de modéliser une route de la manière la plus réaliste possible, nous avons ensuite voulu modifier les propriétés de l'un des patins. Nous avons alors ajouté une masse supplémentaire à l'un des patins, au premier puis au troisième. Dans le paragraphe précédent nous avons mis en évidence que lorsque deux patins sont sur la piste, alors, s'ils sont suffisamment proches le patin le plus lourd stabilisait le plus léger. Sur la figure 1.13 nous avons tracé  $\Delta\Omega_c$  dans trois cas : sans surpoids, avec un surpoids de 390 g sur le premier patin et finalement avec un surpoids de 390 g sur le troisième patin. Dans le cas où l'on met un poids sur un des patins,  $\Delta\Omega_c$  est défini comme la différence entre la pulsation critique du patin avec le poids et celle du patin seul sans poids. L'écart  $\Delta\Omega_c$  est donc positif pour les patins qui ont été alourdis, car comme nous l'avons vu dans la partie 4.2 la vitesse critique est une fonction croissante de la masse. On retrouve comme précédemment que les patins qui n'ont pas été alourdis sont également stabilisés. Le plus surprenant est que le premier patin a quasiment la même pulsation critique lorsqu'il possède le surpoids que lorsque celui-ci est sur le troisième patin. On a l'impression que la masse ajoutée est en quelque sorte délocalisée sur l'ensemble des patins. On remarque tout de même que la courbe représentant  $\Delta\Omega_c$  en fonction de  $(n - 1)e$  possède une concavité plus marquée lorsque le poids est sur le troisième patin.

### 1.3.3 Conclusion

En faisant circuler plusieurs patins sur la piste nous avons pu mettre en évidence plusieurs phénomènes. Tout d'abord les patins interagissent entre eux. Lorsque seulement deux patins sont sur la piste, on a vu que s'ils sont suffisamment proches alors ils se synchronisent et ont la même pulsation critique. Le patin intérieur est déstabilisé pour une vitesse inférieure à sa vitesse critique naturelle. La vitesse critique patin extérieur n'est quant à elle pas modifiée. De même lorsque plusieurs patins circulent sur la piste, on a vu que les patins les plus à l'intérieur de la piste sont déstabilisés. Nous pouvons donc conclure que lorsque plusieurs voitures passent sur une piste (avec un même taux de passage) la déstabilisation de la route est sur-amplifiée par les voitures les plus rapides. Non seulement le taux de croissance des rides augmente avec la vitesse comme nous l'avons vu dans la partie 4.2 mais les voitures les plus rapides décalent le seuil d'instabilité des autres voitures. À l'inverse, lorsque l'on augmente la masse d'un des patins, tout le système est stabilisé. Ainsi, le comportement du véhicule le plus lourd dicte le comportement de la piste. Au final, on peut supposer que les camions roulant vite sont les plus responsables de la tôle ondulée. Ceci reste à vérifier directement sur le terrain et n'est valide que si tous les véhicules passent un nombre de fois identique sur la piste. Tous les résultats obtenus jusqu'ici, sont valables pour une voiture modélisée par un patin incliné et non par une roue. Dans le chapitre suivant nous nous intéressons

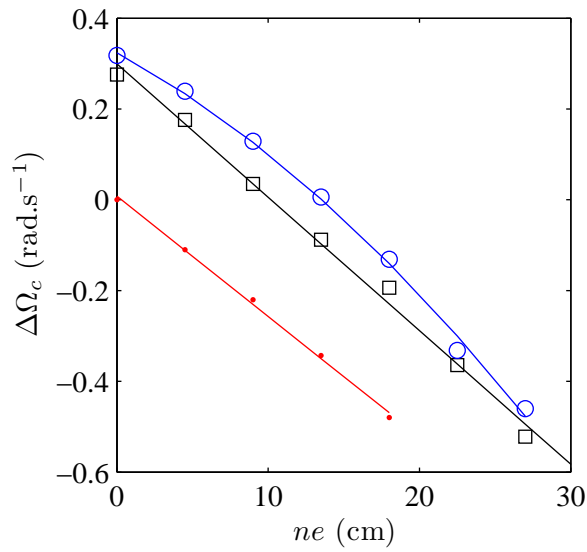


FIGURE 1.13 – **Différence de pulsation critique  $\Delta\Omega_c$  du patin  $n$  en fonction de sa distance au patin extérieur  $(n-1)e$ .** Les différents symboles correspondent aux différentes positions de la masse rajoutée (· : sans masse, □ : masse sur le premier patin, ○ : masse sur le troisième patin). Les courbes en traits pleins servent uniquement de guide pour les yeux. On constate que lorsque l'on rajoute une masse sur un des patins l'ensemble du système est perturbé. On note également que le système a un comportement similaire lorsque la masse est sur le premier patin ou sur le troisième patin.

au cas plus complexe de la tôle ondulée formée par le passage répété d'une roue.

# Chapitre 2

## Instabilité de tôle ondulée créée par une roue

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Présentation . . . . .</b>	<b>136</b>
<b>2.2</b>	<b>Modèle pour la roue . . . . .</b>	<b>136</b>
<b>2.3</b>	<b>Mesure de force . . . . .</b>	<b>137</b>
2.3.1	État stationnaire . . . . .	138
2.3.2	Oscillations . . . . .	140
<b>2.4</b>	<b>Rebonds . . . . .</b>	<b>143</b>
<b>2.5</b>	<b>Mécanisme de fixation de la longueur d'onde . . . . .</b>	<b>145</b>
<b>2.6</b>	<b>Déformation du lit granulaire . . . . .</b>	<b>146</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>148</b>

---

## 2.1 Présentation

Dans les chapitres précédents nous avons décrit et étudié l'instabilité de tôle ondulée lorsque celle-ci était créée par un patin. On peut espérer appliquer certains résultats où méthodes d'analyse au cas où une roue provoque l'instabilité. Comme nous l'avons déjà mentionné, le cas de la roue est plus complexe. Tout d'abord son rayon devient une quantité importante du problème ainsi que son moment d'inertie. De plus, la roue peut être active ou passive suivant qu'on lui impose un couple ou qu'on la tire sur la piste. Pour finir, la façon dont est déformée la piste par son passage est plus complexe que pour un patin. En effet, pour la roue on s'attend à ce que la compacité de la piste joue un rôle important. Nous avons alors limité notre étude à une seule roue de rayon  $R = 3$  cm dans les expériences et  $R = 12.5 d$  dans les simulations. Expérimentalement, nous avons simplement remplacé le patin incliné par une roue reliée à la tige via un roulement à bille. Cette roue est creuse et faite en PVC. Il est très important que la roue soit bien circulaire et ne soit pas excentrée sur son axe de rotation afin de ne pas forcer l'apparition d'une longueur d'onde correspondant à son périmètre. Numériquement, la roue est traitée comme un grain de la simulation auquel on donne un rayon et une masse bien plus important qu'aux autres. On doit bien sûr le traiter à part dans l'algorithme de détection des collisions car sa taille est plus grande que la taille des cellules servant à quadriller l'espace.

La figure 2.1 présente deux diagrammes spatiotemporels de rides formées expérimentalement et numériquement par le passage de la roue. Ceux-ci ressemblent à ceux obtenus pour un patin. Ici aussi on peut repérer la vitesse critique du phénomène en mesurant l'amplitude des rides. Dans l'article de Mather [1963], l'auteur suggère que l'instabilité de tôle ondulée apparaît suite à une perturbation initiale de la piste. Celle-ci fait faire un bond à la roue comme illustré sur la figure 2.1c). Ceci voudrait dire que l'apparition de la tôle ondulée dépend de l'état initial de la piste et est due aux rebonds de la roue sur la piste. Afin de tester cette hypothèse, nous avons mesuré numériquement le temps pendant lequel la roue perd le contact avec la piste sur chaque tour. Il suffit pour cela de compter le nombre d'intervalles  $dt$  pendant lesquels la roue n'a de contact avec aucun grain. La figure 2.2 représente alors le pourcentage de temps en vol de la roue par rapport au temps que dure un tour. Dans cette simulation on note qu'initialement la roue est toujours en contact avec la piste et ce n'est qu'une fois les rides établies que la roue se met à sauter d'une bosse à l'autre. L'instabilité de tôle ondulée apparaît alors que la roue est toujours en contact avec la piste comme dans le cas d'un patin. Cependant, très vite, généralement après une petite dizaine de tours, la roue se met à sauter comme c'est le cas pour les voitures sur les routes. Ainsi, si l'on souhaite décrire uniquement le seuil d'instabilité et la longueur initiale des rides on doit utiliser la même démarche que dans la partie 4.2. En effet, les rebonds de la roue sur la piste ne constituent pas le moteur de l'instabilité, ce sont plutôt des conséquences.

## 2.2 Modèle pour la roue

L'objectif de cette partie est de développer une analyse de stabilité linéaire pour la roue. Tout comme pour l'usure ondulatoire des rails et notre analyse précédente,

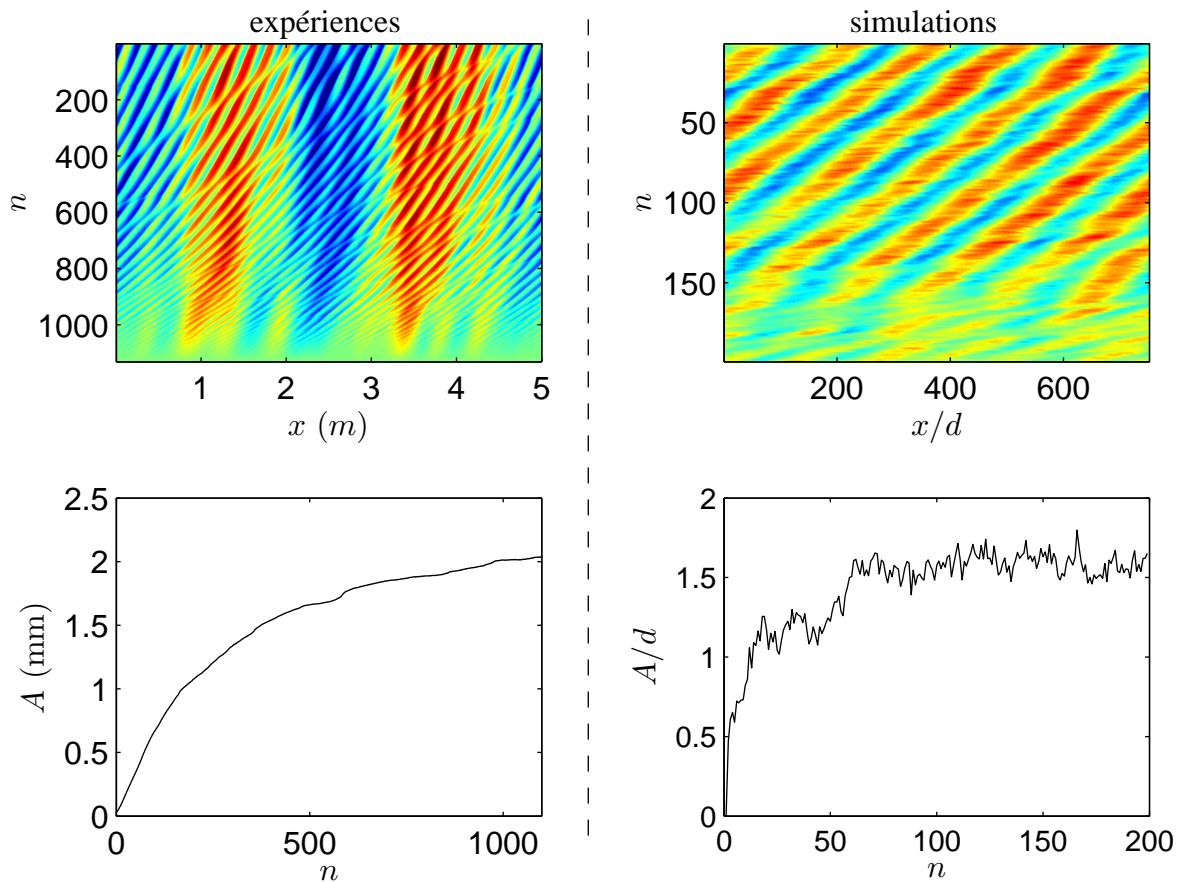


FIGURE 2.1 – **Diagramme spatiotemporel et amplitude des rides créées par une roue dans les expériences et dans les simulations.** Dans l'expérience la vitesse de la roue est de  $v = 1.3 \text{ m.s}^{-1}$  et pèse 200 g. En plus des rides, on observe sur le diagramme une modulation due au capteur d'angle sensible au champ magnétique terrestre. Dans les simulations, la roue a une masse de  $100 \bar{m}$  et une vitesse de  $6 \sqrt{gd}$ .

il convient de mettre en évidence les mécanismes de déformation de la piste et de modéliser la dynamique de la roue.

## 2.3 Mesure de force

La roue étant supposée rigide et soumise uniquement à son poids et à l'action des grains, le principe fondamental de la dynamique donne la même équation que pour la plaque :

$$m\ddot{y} = f_l - mg \quad (2.1)$$

La dynamique de la roue est donc comprise uniquement dans le terme de portance  $f_l$ . Nous pouvons comme dans la partie 4.2 mesurer cette force dans différents cas.

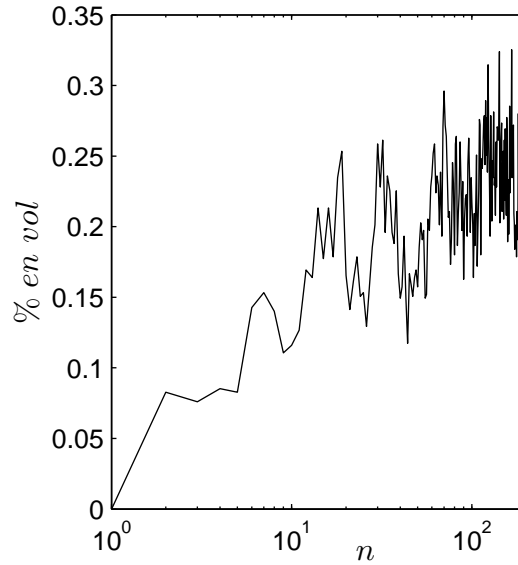


FIGURE 2.2 – **Temps de vol de la roue en pourcentage sur la durée d'un tour.** On remarque que pour les premiers tours ce temps de vol est proche de zéro qu'il augmente au fur et à mesure que les rides se développent.

### 2.3.1 État stationnaire

Nous avons alors réalisé des expériences dans lesquelles on tire une roue à altitude constante imposée sur un lit plat. Cette roue est fixée sur la platine de translation présente sur l'un des bras via un capteur de force. Plusieurs difficultés expérimentales ont été rencontrées. Tout d'abord, si l'on enfonce trop la roue dans la piste, celle-ci se met à entraîner du sable devant elle, comme le faisait le patin, et sa rotation est stoppée. Dans cette situation, la roue ne roule plus sur la piste, cela ressemble plus au cas du patin. Il faut donc éviter d'enfoncer trop la roue dans le sable. De plus, lorsque la roue est en contact avec le sable, elle compacte la piste et après quelques tours elle perd le contact avec celle-ci. Pire encore, la force de portance agissant sur la roue dépend de la compacité de la piste. Plus la piste est compacte et plus la force de portance est élevée pour une même profondeur de pénétration. Nous avons alors choisi de mettre une lame inclinée sur le bras opposé à celui qui supporte la roue. Cette lame va jouer le rôle de bulldozer sur la piste exactement comme dans les mesures de forces de la partie 4.2. Le sable que transporte cette lame est brassé par les rouleaux de convection que nous avons mis en évidence sur la figure 3.13, puis il est déposé à altitude constante derrière la lame. Ceci assure à la roue de rencontrer une piste qui a toujours la même altitude et la même compacité à chaque tour. Cette étude, s'inscrit dans une démarche de simplification du problème physique réel trop complexe à étudier dans son intégralité.

Afin de mesurer la distance de pénétration de la roue dans le sable, deux télé-mètres laser sont utilisés. L'un d'eux mesure l'altitude de la piste et l'autre l'altitude de la platine de translation. La figure 2.3 présente la force de portance ressentie par la roue en fonction de sa pénétration dans le sable  $\delta$  pour différentes vitesses horizon-

tales. À l'instar des expériences de pénétration d'un intrus dans un milieu granulaire

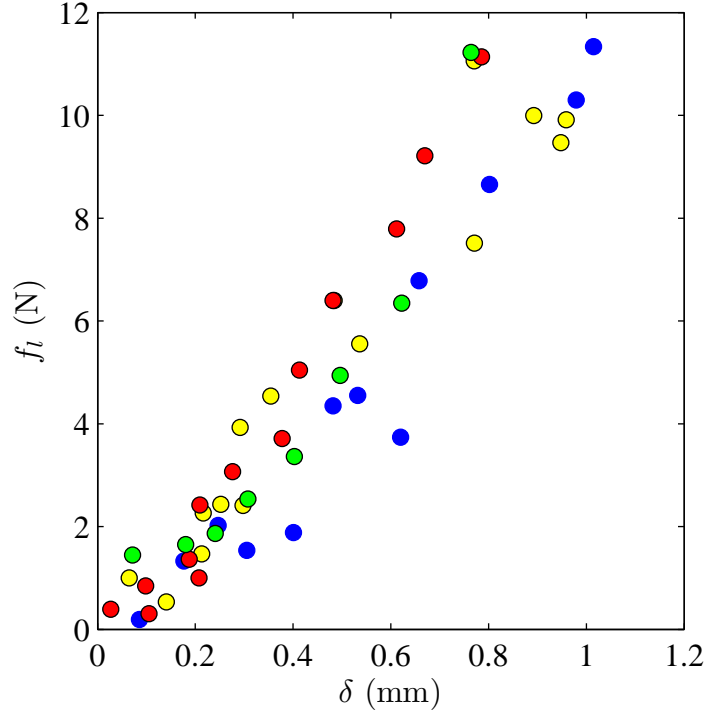


FIGURE 2.3 – **Force de portance agissant sur la roue lorsque celle-ci se déplace à altitude constante sur un lit plat.** La compacité du lit granulaire a été gardée constante entre chaque mesure et les couleurs correspondent à différentes vitesses horizontales. Bleu :  $v = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ , vert :  $v = 1.0 \text{ m.s}^{-1}$ , jaune :  $v = 1.5 \text{ m.s}^{-1}$ , rouge :  $v = 2.0 \text{ m.s}^{-1}$

(Costantino et al. [2008, 2011b]; Stone et al. [2004]; Peng et al. [2009]; Seguin et al. [2011]) nous trouvons que la force de portance est proportionnelle à l'enfoncement de la roue. En réalité, dans la plupart des expériences citées la force de portance dévie un peu d'une loi linéaire à cause des effets de bords (présence du fond et des bords de la boîte contenant le sable), ici on n'enfonce la roue que de 1 mm au maximum alors que la piste fait 15 cm de profondeur et 25 cm de largeur. On ne ressent donc pas les effets de bords. En réalisant la même expérience pour différentes vitesses du patin, nous trouvons que toutes les courbes obéissent à la même loi générale :

$$f_l = k\delta = k(h - y) \quad (2.2)$$

où,  $k$  est une constante de raideur ne dépendant pas de la vitesse de la roue, dépend de la compacité de la piste. Comme la déformation du milieu granulaire se fait sur une fine couche de grains et non pas sur toute son épaisseur, il n'est pas possible à partir de cette loi d'obtenir un module d'Young effectif pour la piste. Pour nos expériences avec une roue d'un rayon de 3 cm et d'une largeur de 5 cm nous mesurons :  $k = 10^4 \text{ N.m}^{-1}$ . On retrouve en partie le comportement qu'avait prédit Riley [1971] lorsqu'il modélise la route par un ressort et une dissipation visqueuse. Ainsi, les mesures de force en régime stationnaire permettent d'obtenir le terme de rappel élastique. Afin de sonder

la dissipation due à une vitesse de pénétration de la roue dans le sable non nulle, nous avons comme dans la partie 4.2 imposé des oscillations sinusoïdales à la roue.

### 2.3.2 Oscillations

Le dispositif expérimental reste inchangé par rapport à la mesure de force en régime stationnaire. On commande cette fois la platine de translation pour qu'elle oscille à une pulsation  $\omega$ . Une difficulté expérimentale se rajoute, en effet, il ne faut pas que l'amplitude des oscillations soit trop importante. Si c'est le cas, la roue peut perdre le contact avec la piste. L'amplitude des oscillations a été fixée à 0.5 mm. La force de portance est mesurée puis moyennée sur une trentaine de périodes. La figure 2.4 présente deux exemples d'oscillations pour une vitesse de la roue  $v = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  et des fréquences d'oscillation de 1 Hz et 4 Hz. Pour mieux les comparer, les deux grandeurs ont été centrées autour de 0 et normalisées. On observe qu'il existe un déphasage entre  $y$  et  $f_l$ . Ce déphasage est proche de  $\pi$  ainsi que le prévoit l'expression 2.2. Pourtant dans la gamme de fréquences que nous pouvons explorer avec notre platine de translation, à savoir de 0 à 4 Hz, nous n'avons pas pu observer de variations notables de ce déphasage. Si la force de portance dépend de  $\dot{y}$  alors cette dépendance est faible. Ceci corrobore les observations expérimentales de Stone et al. [2004], dans lesquelles lors d'un test de pénétration verticale d'un intrus dans un milieu granulaire, ceux auteurs observent une modification de la force de portance de l'ordre de 10% uniquement alors que la vitesse de pénétration augmente d'un facteur 80.

Étant limités par notre dispositif expérimental qui ne pouvait pas imposer de vitesse verticale d'amplitude suffisamment élevée (au delà de  $5 \text{ mm.s}^{-1}$ ), nous nous sommes tournés vers les simulations numériques.

Tout comme dans les expériences, nous avons ajouté sur la piste une lame inclinée devant la roue. Celle-ci lisse la piste et maintient une compacité du lit granulaire constante. Numériquement il est un peu plus délicat que dans les expériences d'enfoncer la roue dans la piste pour qu'elle se mette à rouler sans charrier des grains devant elle. Ceci vient du fait que le rapport entre le rayon des grains et le rayon de la roue est bien plus faible que dans les expériences. Dans ce cas, il faut imposer une distance de pénétration assez faible. Il devient alors délicat (voire presque impossible) de s'assurer que la roue ne perde pas le contact avec la piste lors des oscillations.

La figure 2.5 présente un exemple de résultat obtenu lorsque l'on moyenne la force de portance sur 30 oscillations. La position verticale  $y$  de la roue et la force de portance  $f_l$  ont été, ici aussi, centrées autour de 0 et normalisées. Lors de cette simulation, la roue perd le contact avec la piste. Comme nous n'avons pas réussi à faire en sorte d'empêcher ceci, nous l'avons accepté et modélisé la force de portance par une sinusoïde comme si la réponse du système était linéaire. C'est clairement faux lorsque la roue quitte la piste et les résultats qui suivent sont donc à prendre avec précaution.

En considérant qu'au premier ordre, le système est linéaire et en modélisant la réponse de la force de portance par une sinusoïde, nous pouvons définir comme dans la partie 4.2 une fonction de transfert  $\underline{H}$  en notation complexe par :

$$\underline{H} = \frac{\underline{f_l}}{\underline{y}} \quad (2.3)$$



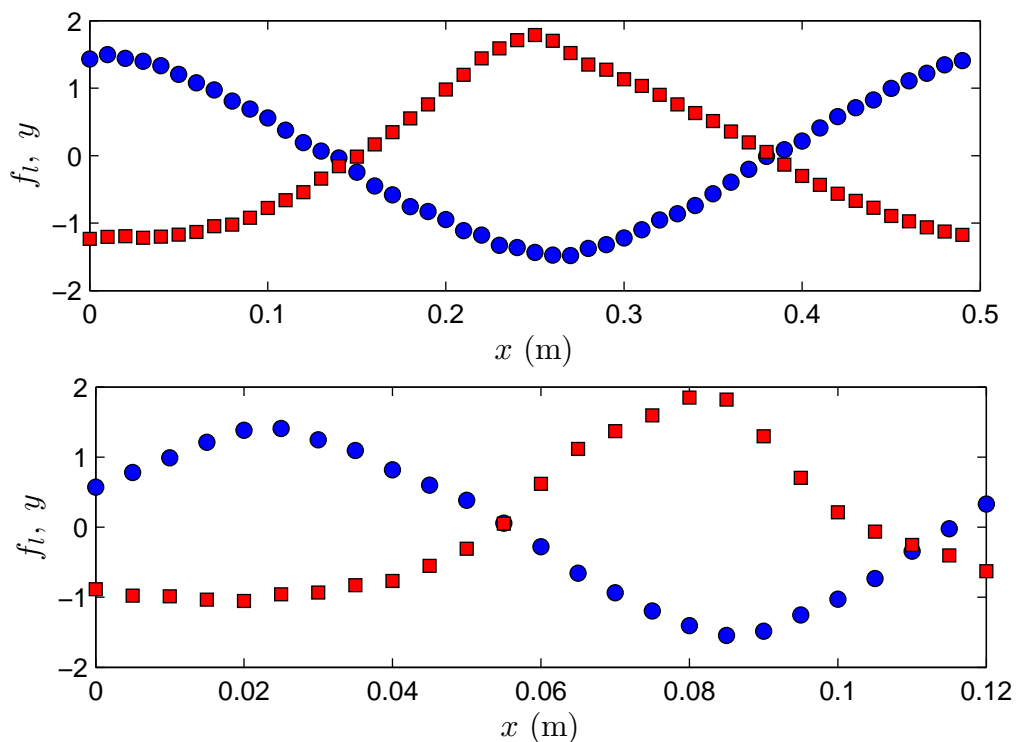


FIGURE 2.4 – **Exemples de trajectoires** (ronds bleus) **et de forces de portance résultantes** (carrés rouges) **dans les expériences**. La trajectoire et la portance ont été normalisées et ramenées autour de zéro afin de les comparer. En haut,  $f = 1$  Hz et  $v = 1.0$  m.s<sup>-1</sup>. En bas,  $f = 4$  Hz et  $v = 1.0$  m.s<sup>-1</sup>. Aucune différence notable n'est visible entre ces deux exemples.

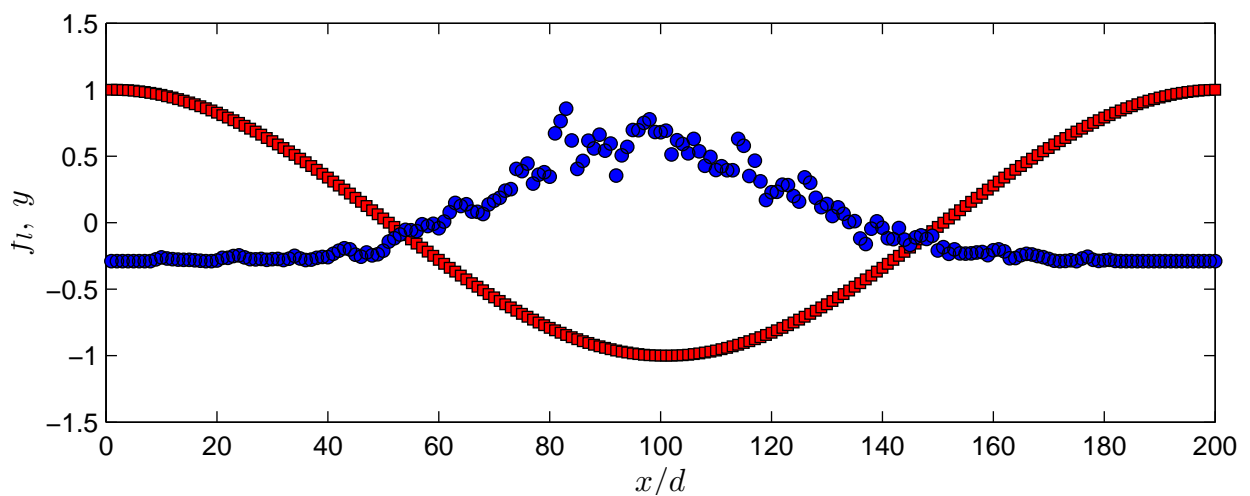


FIGURE 2.5 – **Exemple de trajectoire** (ronds bleus) **et de force de portance résultante** (carrés rouges) **dans les simulations** ( $v = 10 \sqrt{gd}$  et  $\lambda = 200 d$ ). Trajectoire et portance ont été normalisées et ramenées autour de zéro afin de les comparer.

En répétant la simulation représentée sur la figure 2.5 pour différentes vitesses horizontales de la roue et différentes longueurs d'onde excitées, on peut tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\underline{H}$ . La figure 2.6 présente le gain et la phase de  $\underline{H}$  en fonction de la pulsation d'excitation  $\omega = 2\pi v/\lambda$  pour une vitesse de  $5\sqrt{qd}$ . On

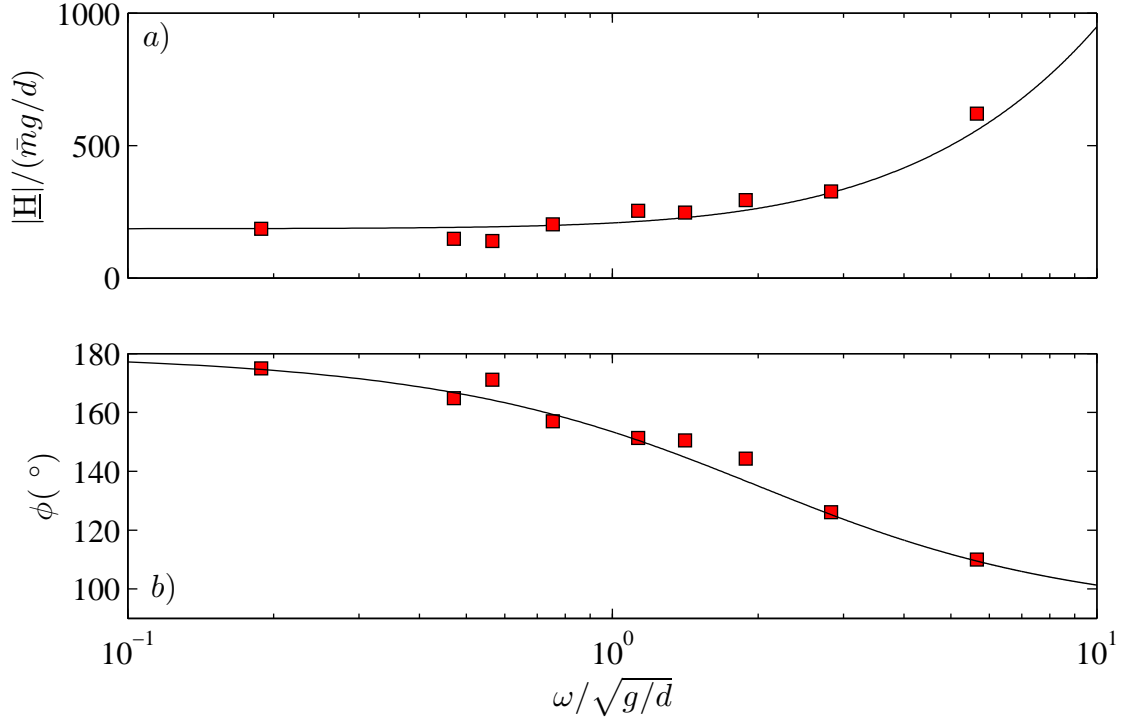


FIGURE 2.6 – Diagramme de Bode de la force de portance agissant sur une roue tirée sur une piste plate avec une compacité constante. a) Gain de la fonction de transfert  $\underline{H}$  en fonction de la pulsation d'excitation. b) Phase de la fonction de transfert en fonction de la pulsation. Les courbes en traits pleins correspondent aux gains et phases calculés à partir d'une force s'exprimant comme suit :  $f_l = k\delta + \gamma\dot{\delta}$ .

constate que dans les simulations le déphasage entre  $y$  et  $f_l$  varie avec la fréquence d'excitation. La courbe en trait plein noir est une modélisation de la fonction de transfert par une expression du type :  $\underline{H} = -k + i\gamma\omega$ . C'est la fonction de transfert associée à une force de portance s'exprimant :  $f_l = k\delta + \gamma\dot{\delta}$ . Cette modélisation semble convenir et on alors calculer les paramètres  $k$  et  $\gamma$  pour différentes vitesse. Ceux-ci sont tracés sur la figure 2.7. Comme dans les expériences le paramètre  $k$  est constant, on remarque également que le coefficient de viscosité  $\gamma$  est une fonction décroissante de la vitesse  $v$ . Tout comme l'avait prédit Riley [1971], il semblerait que l'on puisse modéliser la piste en sable par un ressort en parallèle d'une dissipation visqueuse. La différence ici est que l'amortissement dépend de la vitesse de la roue et pas la raideur du ressort. Ces résultats sont bien entendu discutables étant donné qu'ils ont été obtenus dans un régime où la roue quitte le sol pendant une certaine durée.

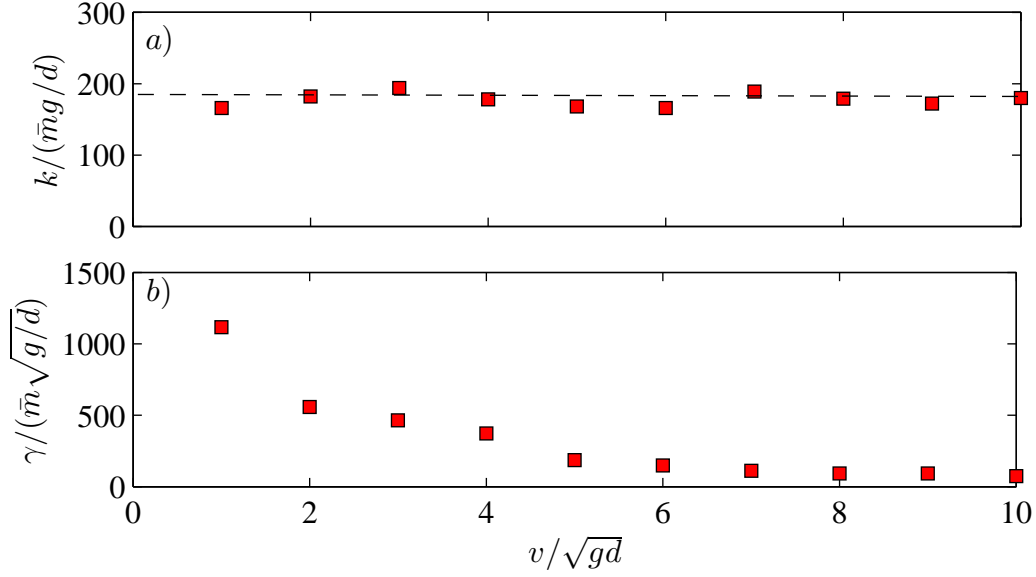


FIGURE 2.7 – a) **Raideur effective  $k$  du lit de grains en fonction de la vitesse de la roue.** Comme dans les simulations, on trouve que ce coefficient est indépendant de la vitesse. b) **Coefficient de frottement visqueux  $\gamma$  en fonction de la vitesse** calculé dans les simulations numériques à partir d’une modélisation du diagramme de Bode de la force de portance. Ce coefficient est une fonction décroissante de la vitesse de la roue.

## 2.4 Rebonds

Nous avons alors cherché un autre moyen de vérifier ces prédictions. Plutôt que d’imposer le mouvement de la roue et de mesurer les efforts qui agissent dessus, nous avons choisi de la laisser libre de se déplacer verticalement et d’analyser sa trajectoire. Numériquement, la roue est placée à une altitude initiale  $h_i$  de quelques grains au-dessus de la surface de la piste et elle se déplace à une vitesse horizontale constante  $v$ . La roue entame alors une chute libre jusqu’à ce qu’elle touche la piste. Dans certains cas (lorsque la vitesse est suffisamment élevée) la roue rebondit. On peut repérer la hauteur  $h_f$  atteinte suite à ce rebond. Dans l’hypothèse où la piste se comporte comme un ressort en parallèle d’un amortisseur, on peut prédire cette hauteur  $h_f$ . On a :

$$h_f = h_i \exp\left(-\frac{\gamma\pi}{m\Omega}\right), \quad (2.4)$$

où  $\Omega$  est la pulsation d’oscillation de la roue sur le sable valant :  $\Omega = \sqrt{-\gamma^2/(4m^2) + k/m}$ . La figure 2.8a) présente un exemple de la trajectoire de la roue lorsque celle-ci rebondie sur la piste. En calculant la force de portance agissant sur la roue on peut mesurer la durée de l’impact. En effet, de façon très simple, la force est non nulle uniquement pendant l’impact. Cette durée d’impact est représenté en fonction de la vitesse verticale de la roue sur la figure 2.8b). Celui-ci est constant, ce qui est compatible avec une force du type  $f_l = k\delta + \gamma(v)\dot{\delta}$  dans le cas où la dissipation est faible devant la force de rappel (dans ce cas la durée de l’impact est  $T/2 \simeq \pi/\sqrt{k/m}$ ). Ceci, combiné aux mesures de forces en régime stationnaire et en régime oscillant, nous convainc que la

force de portance peut effectivement être modélisée par :

$$f_l = k\delta + \gamma(v)\dot{\delta}. \quad (2.5)$$

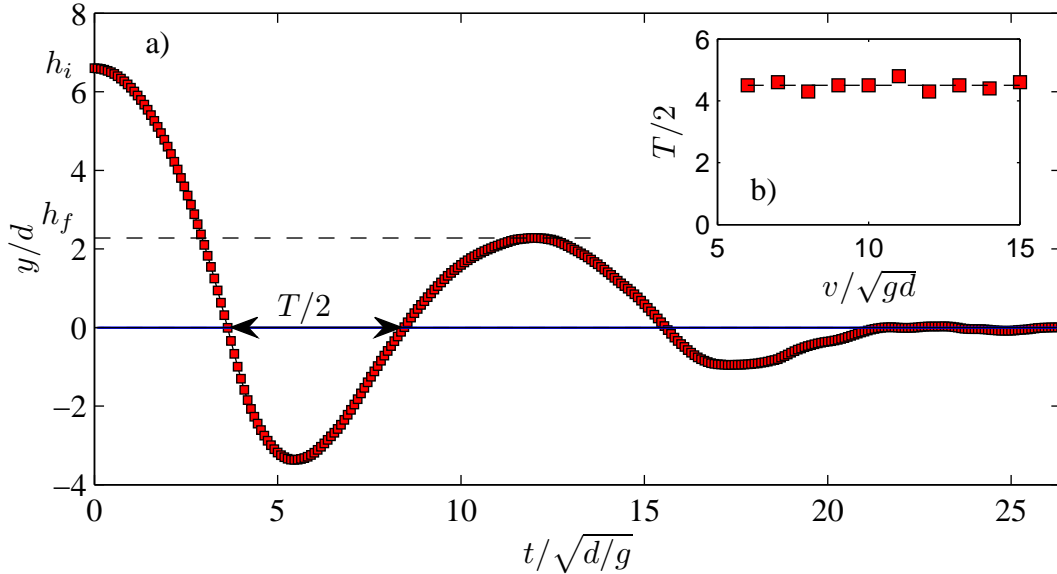


FIGURE 2.8 – a) **Trajectoire de la roue au cours du temps lorsqu'elle rebondie sur la piste.** La mesure de la hauteur du rebond  $h_f$  et du temps de contact  $T/2$  avec la piste permet de connaître les coefficients  $k$  et  $\gamma$ . b) **Temps de contact  $T/2$  entre la piste et la roue en fonction de la vitesse de la roue.** Ce temps semble constant.

La mesure de la hauteur de rebond  $h_f$  permet de calculer le coefficient  $\gamma(v)$  via la relation 2.4. Celui-ci est représenté sur la figure 2.9 en fonction de la vitesse pour trois moments d'inertie de la roue différents à rayon et masse constante. Comme nous l'avions pressenti en mesurant la fonction de réponse de la force de portance, le coefficient  $\gamma$  est une fonction décroissante de la vitesse. Sur la figure 2.9 nous avons également superposé les résultats obtenus en oscillations forcées. On constate que ces deux méthodes d'analyse sont compatibles. En dessous de  $v = 6 \sqrt{gd}$  on ne peut plus calculer  $\gamma$  car la roue ne rebondie pas suffisamment pour que l'on puisse mesurer  $h_f$ . En effet, pour  $v = 6 \sqrt{gd}$   $\gamma = 200 m \sqrt{g/d}$ , or comme  $\sqrt{k/m} = 0.6 \sqrt{g/d}$ , le facteur de qualité de l'oscillateur  $Q$  vaut  $Q = \sqrt{km/\gamma^2} = 0.6$ . À de plus faible vitesse le coefficient  $\gamma$  est encore plus élevé et donc  $Q < 1/2$ , le système est alors dans un régime sur-amorti dans lequel il n'y a plus de rebond. À l'inverse, à très hautes vitesses  $h_f > h_i$  et donc  $\gamma < 0$  (non représentés sur la figure 2.9). Ceci n'est pas choquant, car la roue est tirée à vitesse constante, elle reçoit de l'énergie de la part d'un opérateur, ainsi, son énergie mécanique peut augmenter. On retrouve alors les trois régimes que nous avons mis en évidence dans la partie 4.2 lorsque le patin circulait sur une piste lisse. Nous avons également trouvé les trois régimes sur-amorti, amorti et amplifié (figure 4.6). En conclusion de ces mesures de forces et d'analyse de trajectoire, nous pouvons raisonnablement supposer que la force de portance agissant sur la roue lorsqu'elle se déplace sur une route lisse s'écrit :  $f_l = k\delta + \gamma(v)\dot{\delta}$ , où  $\gamma$  est une fonction décroissante de la vitesse de la roue. Les

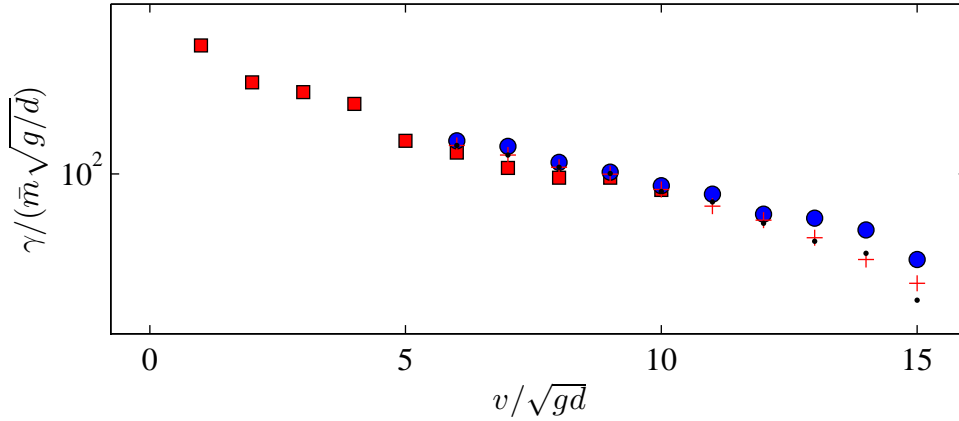


FIGURE 2.9 – Coefficient d’amortissement  $\gamma$  en fonction de la vitesse de la roue pour différents moments d’inertie de la roue. Les points noirs correspondent à un moment d’inertie  $J = mR^2/2$  qui est celui d’une roue pleine et homogène, les ronds à un moment cent fois plus faible et les croix à un moment cent fois plus élevé. On remarque que  $\gamma$  décroît avec la vitesse et que les trois courbes sont quasiment superposées. Le moment d’inertie et donc la rotation de la roue n’influencent quasiment pas la dynamique verticale de la roue. La courbe en carrés rouges correspond aux résultats obtenus en oscillations forcées.

mesures ont toutes été effectuées dans un cas où  $h$  était constant et il faudrait vérifier que  $f_l$  dépende de manière symétrique de  $h$  et de  $y$ .

Si l’on revient au schéma global des instabilités de type usure ondulatoire des rails de la figure 3.11 dans lequel s’inscrit l’instabilité de tôle ondulée, nous avons résolu la dynamique de la roue qui est le mécanisme de fixation de la longueur d’onde.

## 2.5 Mécanisme de fixation de la longueur d’onde

D’après les résultats précédents, la longueur d’onde la plus instable des rides vaut :  $\lambda = \frac{2\pi v}{\sqrt{-\gamma^2/(4m^2) + k/m}}$ . Le fait qu’expérimentalement nous n’ayons pas réussi à mesurer le coefficient  $\gamma$ , nous permet de faire l’hypothèse que l’on peut, dans les expériences, assimiler la pulsation du système à sa pulsation propre  $\Omega_0 = \sqrt{k/m}$ . La longueur d’onde se simplifie alors :

$$\lambda = 2\pi v \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (2.6)$$

où le coefficient  $k$ , mesuré dans le régime stationnaire, vaut  $10^4 \text{ N.m}^{-1}$ . On peut alors comparer cette longueur à la longueur d’onde initiale des rides mesurée avant que la roue ne saute sur la piste et que le phénomène de murissement n’intervienne. La figure 2.10 présente alors la longueur d’onde mesurée expérimentalement en fonction de la longueur d’onde calculée via l’équation 2.6. Pour réaliser ces mesures, nous avons ajouté des masses sur la roue et l’avons fait circuler sur la piste à une vitesse supérieure à sa vitesse critique. Après une petite dizaine de tours, on observe un motif régulier dont on mesure la période avant que la roue ne se mette à sauter et que le murissement

apparaisse.

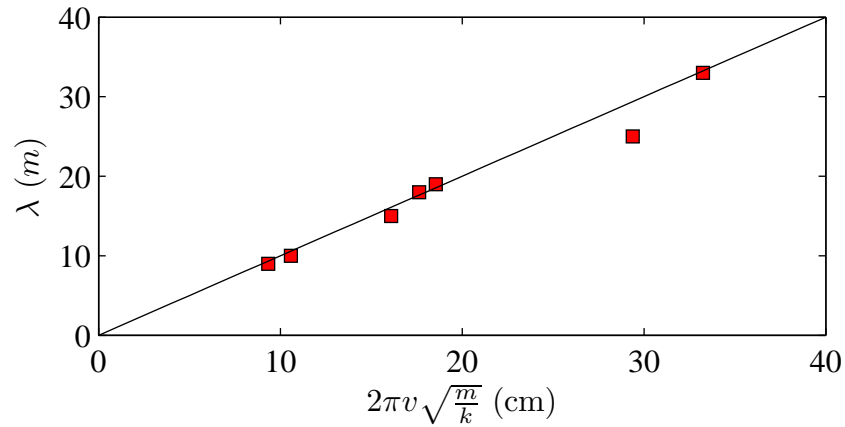


FIGURE 2.10 – **Longueur d’onde  $\lambda$  mesurée expérimentalement en fonction de la longueur d’onde prédite.** Les carrés rouges correspondent aux relevés expérimentaux. La droite en trait plein correspond à la fonction identité. On peut conclure la longueur des rides est effectivement donnée par la relation 2.6.

On constate que la longueur d’onde des rides est effectivement donnée par l’expression 2.6. La seule mesure de la force de portance dans le régime stationnaire permet, tout comme pour le patin, de prédire la longueur d’onde la plus instable. Nous avons donc effectivement trouvé le mécanisme fixant la longueur d’onde. Afin de poursuivre l’étude de l’instabilité de tôle ondulée créée par une roue, il convient maintenant de dégager les mécanismes responsables de la déformation de la piste.

## 2.6 Déformation du lit granulaire

Nous avons mesuré la déformation du lit de grains après le passage de la roue de la même façon que dans la partie 4.2. L’un des télémètres laser mesure l’altitude de la roue tandis que le second relève le profil imprimé par celle-ci dans la piste. La roue utilisée a tout d’abord été montée sur la platine de translation afin de reproduire l’expérience de la partie 4.2. On lui a imposé un mouvement vertical sinusoïdal tout en la tirant à vitesse constante sur une piste plate. Cependant, dans ce cas, l’amplitude des oscillations de la roue n’étaient pas suffisante pour que l’on puisse mesurer correctement le remodelage de la piste et aboutir à une conclusion. Nous avons alors déplacé la roue sur l’autre bras de l’expérience et l’avons montée sur l’axe qui permet de reproduire l’instabilité de tôle ondulée. Cette fois-ci la roue est libre de se déplacer verticalement. Préalablement à l’expérience, des rides ont été créées à la surface de la piste. Celles-ci ont été formées soit à la main, soit en laissant évoluer la roue à une vitesse supérieure à sa vitesse critique et en laissant l’instabilité de tôle ondulée couvrir la piste de rides. Une fois ces rides créées, la roue est tirée sur la piste à une vitesse inférieure à sa vitesse critique et pour laquelle elle garde toujours le contact avec le lit de grains. Ces expériences ont été réalisées à la fin de ma thèse et doivent être considérées avec précaution. Il ne s’agit que de résultats préliminaires demandant à être vérifiés. La figure 2.11a) présente un

exemple de trajectoire de la roue (courbe rouge) et de la trace qu'elle imprime dans la piste (courbe bleue). On peut remarquer que les deux signaux sont tout d'abord en phase et qu'ils sont également très proches. En effet, si l'on trace le profil de la piste en fonction de l'altitude du patin (figure 2.11b)) on obtient une droite de pente  $\chi = 0.96$ . On retrouve un résultat similaire à celui que nous avons obtenu pour le patin. Toutefois, il convient d'insister sur le fait qu'il ne s'agit ici que d'un seul exemple réalisé pour une vitesse donnée de la roue. Nous pouvons tout de même nous permettre de faire quelques extrapolations de ce résultat.

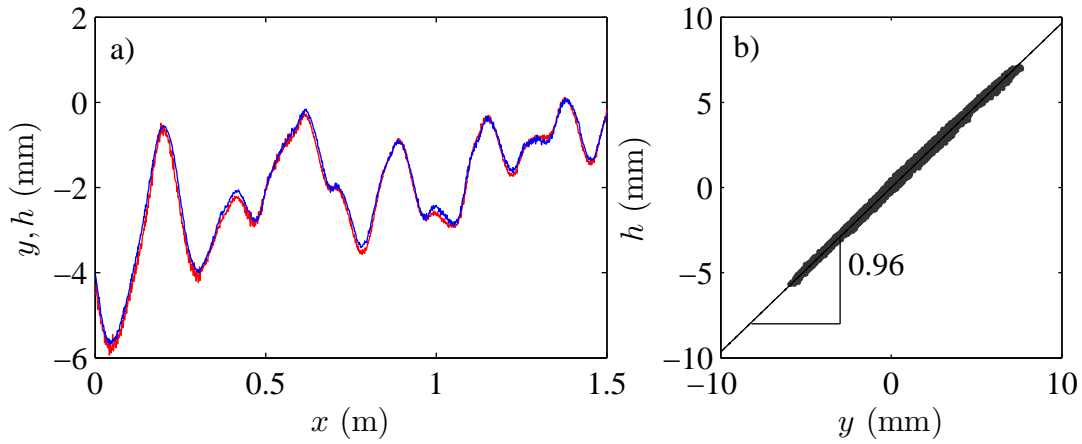


FIGURE 2.11 – a) Exemple de trajectoire de la roue (en rouge) et du profil qu'elle laisse derrière elle (en bleu) en fonction de la distance sur la piste. On remarque que les deux signaux sont quasiment identiques. b) Profil de la piste en fonction de la trajectoire de la roue. On obtient une droite de pente 0.96, ce qui signifie que ces deux quantités sont en phase. De plus, ceci laisse supposer que, comme pour le patin, on peut définir un coefficient d'impression du profil  $\chi$ .

Ainsi, si l'on suppose que  $h_{n+1} = \chi y$ , alors l'analyse de stabilité linéaire pour la roue s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{y} + \frac{\Omega_0}{Q}\dot{y} + \Omega_0^2 y = \frac{\Omega_0}{Q}\dot{h}_n + \Omega_0^2 h_n \\ h_{n+1} = \chi y \end{cases} \quad (2.7)$$

Où  $\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$  et  $\frac{\omega}{Q} = \frac{\gamma}{m}$ . Nous pouvons alors exprimer le taux de croissance  $\sigma$  des rides :

$$\sigma = \log \frac{|h_{n+1}|}{|h_n|} = \log \chi + \frac{1}{2} \log \left( \frac{\Omega_0^4 + \frac{\omega^2 \Omega_0^2}{Q^2}}{(\omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2 \Omega_0^2}{Q^2}} \right) \quad (2.8)$$

Dans cette expression, la vitesse de la roue n'apparaît pas explicitement. Cependant, le coefficient  $\gamma$  et donc le facteur de qualité  $Q$  sont des fonctions de la vitesse. Le facteur de qualité est même une fonction croissante de la vitesse  $v$ . Ainsi, augmenter la vitesse revient à augmenter  $Q$ . La figure 2.12 présente alors le taux de croissance  $\sigma$  en fonction de la pulsation  $\omega$  pour différentes valeurs de  $Q$ .

On constate sur cette figure que pour de faibles valeurs de  $Q$  le taux de croissance est toujours négatif, alors que pour des valeurs élevées de  $Q$  le taux de croissance admet

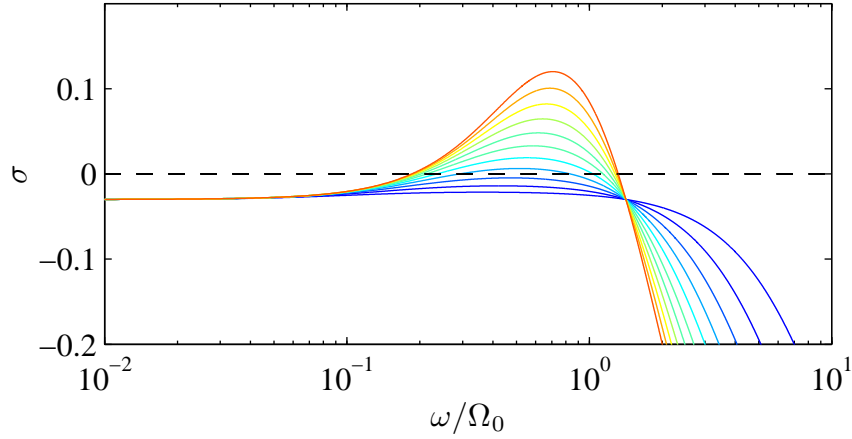


FIGURE 2.12 – **Taux de croissance  $\sigma$  des rides en fonction de la pulsation réduite  $\omega/\omega_0$**  pour différentes valeurs du facteur de qualité  $Q$ , celui-ci passe de 0.1 (courbe en bleu) à 0.5 (courbe en rouge). On constate alors que pour des faibles valeurs du facteur de qualité, c'est-à-dire pour des vitesses faibles, le taux de croissance est toujours négatif. Puis il existe un facteur de qualité critique au delà duquel le taux de croissance admet des valeurs positives. Ce modèle prédit alors l'existence d'une vitesse critique.

des valeurs positives. En d'autres termes, à basse vitesse la piste est stable et à haute vitesse la piste développe des rides. Nous avons donc ici pour la première fois un mécanisme potentiel qui prédit l'existence d'une vitesse critique. Cette étude préliminaire reste toutefois à confirmer. On peut par exemple regretter que cette modélisation du remodelage de la piste conduise à un taux de croissance négatif pour  $\omega = 0$ . En effet, une piste parfaitement lisse ne peut s'affaisser indéfiniment. Des mesures plus approfondies du remodelage de la piste par la roue sont nécessaires. Celles-ci pourraient être également réalisées dans les simulations. De plus, l'effet de la compaction du lit de grains a été entièrement négligé alors qu'il joue certainement un rôle important.

## 2.7 Conclusions

Nous avons pu dégager les principaux mécanismes responsables de l'instabilité de tôle ondulée sur un lit granulaire sec. La mesure de la force de portance agissant sur la roue, lorsqu'elle se déplace à altitude constante sur un lit plat, présente les mêmes caractéristiques que la force nécessaire pour faire pénétrer verticalement un intrus dans un milieu granulaire. Cette force est proportionnelle à l'enfoncement de la roue et ne dépend pas de la vitesse horizontale. Cette mesure permet alors de prédire la longueur d'onde des rides. Les mesures de forces et l'étude des rebonds de la roue dans les simulations nous ont ensuite révélé que la roue était aussi soumise à une force de frottement visqueux dont l'amplitude décroît avec la vitesse. Ainsi, la roue est analogue à un oscillateur amorti dont la fréquence propre est directement liée à la longueur d'onde des rides. Une étude préliminaire du remodelage de la piste par la roue nous a ensuite permis de calculer le taux de croissance des rides. Ce taux de croissance est toujours négatif aux faibles vitesses et admet des valeurs positives pour des vitesses élevées. Bien que ces résultats doivent être considérés avec précaution, ils constituent



la première approche de l'instabilité de tôle ondulée prédisant la longueur d'onde et faisant apparaître une vitesse critique sans utiliser de terme *ad hoc* dans la modélisation.

Jusqu'à présent nous avons étudié le comportement de la piste en sable sous l'influence de divers véhicules. La première étude portait sur le cas simplifié d'une seule lame inclinée tirée à vitesse constante sur une piste. Puis afin de modéliser le passage de différents véhicules, nous en avons ajouté plusieurs. Pour finir nous avons étudié l'effet d'une roue. Dans aucun cas nous n'avons modifié la nature de la piste sur laquelle évolue le véhicule. Il s'agissait à chaque fois d'un lit granulaire sec. Cependant, les routes sont rarement tout à fait sèches. L'humidité de la route rajoute de la cohésion entre les grains ce qui modifie ses propriétés mécaniques et donc l'apparition de la tôle ondulée. De plus, comme nous l'avons mentionné en introduction, certaines entreprises sont spécialisées dans l'épandage d'hydrocarbures ou autres liquides sur les routes. Ce procédé augmente la cohésion de la route et est réputé pour limiter l'apparition de la tôle ondulée. C'est dans le but d'interpréter ces résultats que nous avons réalisé des expériences de tôle ondulée sur un milieu granulaire humide.



# Chapitre 3

## Washboard sur un milieu granulaire humide

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Présentation . . . . .</b>	<b>152</b>
<b>3.2</b>	<b>Mesure de la cohésion . . . . .</b>	<b>154</b>
<b>3.3</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>157</b>
	3.3.1 Caractéristiques de la tôle ondulée . . . . .	157
<b>3.4</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>158</b>

### 3.1 Présentation



FIGURE 3.1 – Photographie d’un camion citerne destiné à déversé une solution de chlorure de calcium sur les routes sujettes à l’instabilité de tôle ondulée. Ce traitement permet d’avoir une piste plus cohésive qui développera des rides plus lentement (source : Google Image).

Comme nous l’avons vu précédemment, l’instabilité de tôle ondulée apparaît comme un phénomène assez robuste qui se manifeste dans de nombreuses situations. En effet, nous avons vu que le motif peut être créé dès qu’un objet (roue ou un patin) est tiré sur lit granulaire. De plus, nos études ont montré que la taille des grains du milieu granulaire n’est pas un paramètre pertinent. Ceci signifie que le milieu granulaire peut être considéré ici comme un milieu continu. De même, en introduction nous avons présenté plusieurs instabilités se développant sur d’autres matériaux (acier, neige, etc.) et qui sont similaires à l’instabilité de tôle ondulée. Il semble donc que ce type d’instabilité apparaît dès lors qu’un objet se déplace à la surface d’un matériau pouvant se déformer de manière irréversible. Ainsi, en remplaçant le sable par un matériau dont la rhéologie est connue, on peut espérer dégager des comportements universels pour toutes ces instabilités (tôle ondulée, usure ondulatoire, broutement, etc.). Cette étude est prévue dans le prolongement de ma thèse. Ici, nous nous intéressons à l’instabilité de tôle ondulée sur des lits granulaires humides. Bien que l’on n’ait pas de description complète de la rhéologie d’un tel milieu, cette situation est fréquemment rencontrée sur les routes. À titre d’illustration, la photographie de la figure 3.1 montre un camion citerne utilisé pour déverser une solution de chlorure de calcium sur les routes sujettes à l’instabilité de tôle ondulée. Ce type de traitement permet de diminuer par deux le temps entre chaque passage de bulldozer (source : <http://www.peterschemical.com>). La solution de chlorure de calcium permet de capter l’humidité ambiante au dessus de la route

et forme alors un liquide incolore qui ne s'évapore que très peu. Ce liquide renforce en quelque sorte la piste en ajoutant de la cohésion entre les grains qui la constituent. Nous avons choisi d'ajouter de l'huile minérale au sable, celle-ci ne s'évaporant pas dans les conditions de l'expérience. Afin d'éviter de manipuler de trop grandes quantités de sable et d'huile (l'expérience précédente contient 300 kg de sable), nous avons construit un dispositif expérimental plus petit dont la cuve ne contient que 3 kg de sable.

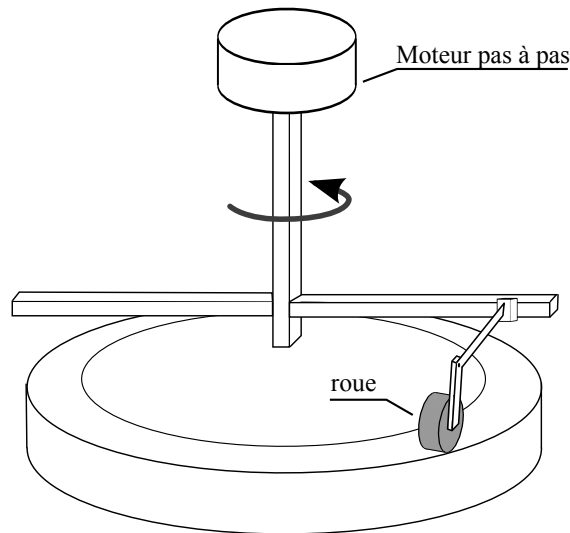


FIGURE 3.2 – **Schéma de l'expérience utilisée afin d'étudier l'influence de la cohésion de la piste sur l'apparition de la tôle ondulée.** Une piste circulaire et étanche de 50 cm de diamètre et 5 cm de large contient une hauteur de 5 cm de sable humide. Au centre de la piste, un axe central est mis en rotation à l'aide d'un moteur pas à pas, cet axe supporte deux bras horizontaux dont l'un d'eux tire une roue qui est libre de se déplacer verticalement.

Le schéma de ce dispositif expérimental est représenté sur la figure 3.2. Une cuve de 25 cm de rayon et 5 cm de large contient du sable sur une hauteur d'environ 5 cm. Cette cuve est étanche afin d'empêcher l'huile de se répandre. Une structure en Dural non représentée sur le schéma soutient un axe central qui est mis en rotation grâce à un moteur pas à pas. Sur cet axe sont fixés deux bras horizontaux dont l'un soutient la roue. Cette roue est, comme dans les expériences précédentes, fixée au bras via une tige et un roulement à billes. On assimile donc le mouvement de la roue dans le référentiel tournant avec l'axe central à un mouvement vertical. La roue est ici aussi soumise uniquement à son poids et à la réaction des grains.

Dans les simulations numériques, nous avons également modélisé la cohésion des grains. Plutôt que de modéliser l'apparition des ponts capillaires entre les grains, nous avons choisi de façon très simple de rajouter une force attractive constante,  $f_c$ , entre deux grains en contact. Nous savons qu'à volume de liquide constant la force de cohésion dépend de l'écartement entre les grains (Restagno [2000]), nous n'avons toutefois pas souhaité décrire la cohésion à un tel niveau de taille. Nous verrons que cette simple modélisation permet déjà de reproduire les observations expérimentales. La figure 3.3 présente deux exemples d'empilements de grains cohésifs pour deux valeurs de  $f_c$  différentes. Ces empilements sont créés en laissant tomber des grains initialement placés sur une grille carrée. On remarque que le rapport d'aspect de l'empilement augmente

avec  $f_c$ . Dans les simulations d'instabilité de tôle ondulée, nous avons utilisé comme état initial pour la route, un empilement réalisé sans aucune cohésion et auquel on a rajouté la cohésion souhaitée. De plus, aucune cohésion n'a été ajoutée entre la piste et la roue.

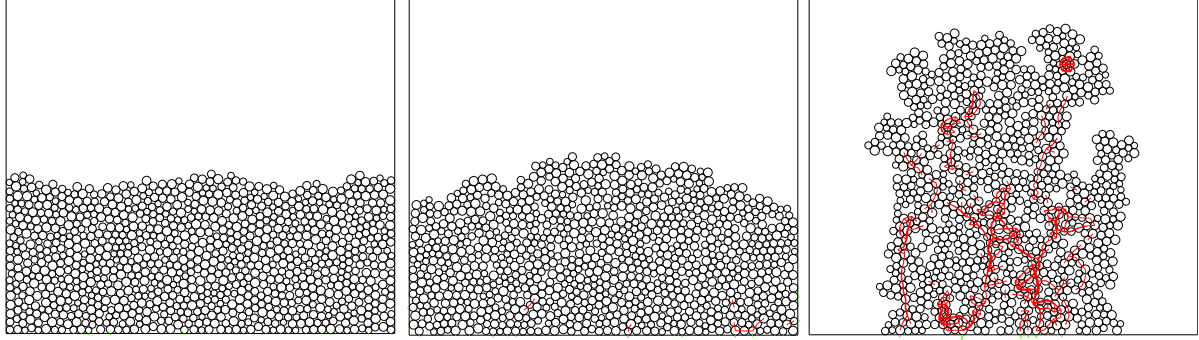


FIGURE 3.3 – **Exemple de trois empilements de grains.** Celui de gauche ne contient aucune cohésion. Pour l'empilement du milieu une force de cohésion  $f_c = 10 \bar{m}g$  a été ajoutée. Pour l'empilement de droite la force de cohésion vaut  $500 \bar{m}g$ . Les traits rouges représentent l'intensité des contacts entre les grains.

## 3.2 Mesure de la cohésion

Afin de comprendre l'influence de la cohésion entre les grains sur le comportement global de la piste, il convient de rappeler quelques principes de mécanique des milieux continus. En effet, comme nous l'avons toujours supposé jusqu'ici, bien que la piste soumise au passage du véhicule soit un milieu fait de grains et donc discontinu, celle-ci peut être étudiée via une approche continue. De plus, nous pouvons nous restreindre à une étude en deux dimensions. Dans ce cas, on sait que l'état des contraintes peut être décrit par un cercle de Mohr-Coulomb. En effet, si l'on considère un volume élémentaire en compression comme décrit sur le schéma 3.4a), les contraintes normale et tangentielle agissant sur un plan orienté d'un angle  $\alpha$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma = P + R \cos(2\alpha) \\ \tau = R \sin(2\alpha) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  et  $R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$  avec  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les deux contraintes de compression du milieu. Ainsi, dans le plan  $(\sigma, \tau)$  l'état des contraintes décrit par le système d'équations 3.1 représente un cercle de centre  $(P, 0)$  et de rayon  $R$  (voir figure 3.4b)). Un tel système peut se rompre si la contrainte de cisaillement est trop élevée. Le critère de rupture de Coulomb donne la valeur limite de la contrainte de cisaillement au delà de laquelle un plan de rupture se forme :

$$\tau = \mu\sigma + c, \quad (3.2)$$

où  $\mu$  et  $c$  sont des paramètres intrinsèques au milieu considérés et représentent respectivement le coefficient de friction interne et la cohésion. Le critère de Mohr-Coulomb



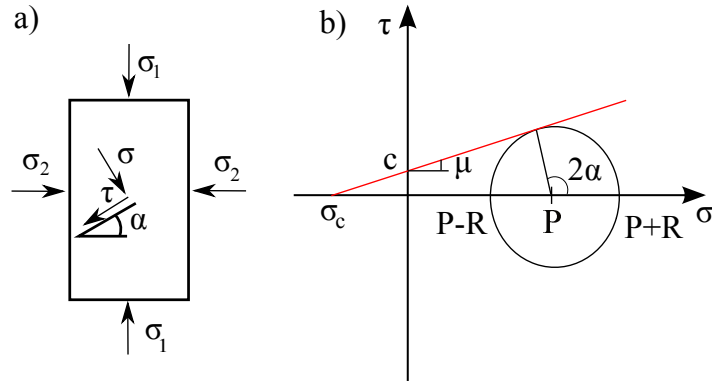


FIGURE 3.4 – a) Représentation d'un volume élémentaire de milieu granulaire soumis aux compressions  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . On définit alors  $\sigma$  et  $\tau$  les contraintes de cisaillement appliquées au plan incliné d'un angle  $\alpha$ . b) Cercle de Mohr-Coulomb représentant les contraintes normales et tangentiels. Lorsque ce cercle intersecte la droite représentant le critère de rupture (ligne rouge) un plan de fracture d'inclinaison  $\alpha$  apparaît au sein du milieu granulaire.

est fondé sur le principe qu'un plan de glissement apparaît dès lors que le cercle de Mohr-Coulomb intersecte la droite d'équation  $\tau = \mu\sigma + c$  (voir figure 3.4b)). À l'inverse, si le cercle de Mohr-Coulomb est en dessous de la droite, il n'y a pas d'écoulement de grains et le milieu se comporte comme un bloc solide car les contraintes ne sont pas suffisantes pour le briser. On peut définir ce que l'on appelle la contrainte de cohésion en traction  $\sigma_c$  comme  $c/\mu$ , cette quantité est l'analogue de la force de cohésion  $f_c$  que nous avons ajoutée dans les simulations numériques. Ainsi, partant d'un milieu granulaire en compression sous une contrainte  $\sigma_c$  et en le cisillant progressivement, on augmente la taille du cercle de Mohr-Coulomb jusqu'à ce que celui-ci atteigne la droite décrivant le critère de Coulomb. Un plan de glissement apparaît au sein du milieu et celui-ci se réorganise. On note  $\tau_c$  la valeur de la contrainte de cisaillement pour laquelle le glissement a lieu. Le point de coordonnées  $(\sigma_c, \tau_c)$  est donc sur la droite du critère de Coulomb. En mesurant plusieurs couples de contraintes  $(\sigma_c, \tau_c)$  on peut alors retracer cette droite et obtenir les coefficients  $\mu$  et  $c$ .

Différentes méthodes sont envisageables afin de comprimer et cisiller un milieu granulaire (Condotta [2005]), on peut par exemple utiliser une cellule de compression biaxiale ou encore un rhéomètre avec différentes géométries. Nous avons effectué une expérience extrêmement simple. Celle-ci est schématisée sur la figure 3.5. Il s'agit d'une plaque de PVC de 10 cm de large et 15 cm de long, dotée de cornières de 2 cm de long régulièrement espacées et alignées selon la largeur de la plaque. L'ajout de ces cornières permet d'avoir un plan de cisaillement localisé à l'intérieur du milieu granulaire. Sans elles on observe uniquement un glissement de la plaque sur le lit de sable et non pas une rupture au sein du milieu. Cette plaque est posée sur le lit granulaire et les cornières sont entièrement enfoncées dans le sable. Le sable présent à l'avant et sur les côtés de la plaque est ensuite délicatement ôté afin de soumettre le matériau uniquement à un cisaillement horizontal. Enfin, on tire la plaque avec une force croissante. Cette force est mesurée à l'aide d'un dynamomètre et on relève sa valeur à la rupture du milieu. On

répète alors cette expérience en ajoutant des poids sur la plaque de PVC. Ceci permet de faire varier la force normale  $N$  appliquée au milieu granulaire. La mesure de la force tangentielle  $T$  nécessaire pour rompre ce milieu permet de tracer la loi  $\tau = \mu\sigma + c$ . En effet, on peut relier  $\tau$  et  $\sigma$  et  $T$  et  $N$  via :  $\tau = T/S$  et  $\sigma = (N + M^*g)/S$ , où  $S$  est la surface de la plaque et également de la zone cisailée,  $N$  est la somme du poids de la plaque et du surpoids qui lui est appliqué. La masse  $M^*$  est la masse des grains présents entre la plaque et le plan de cisaillement du milieu. Cette masse correspond à la masse des grains contenus entre les cornières.

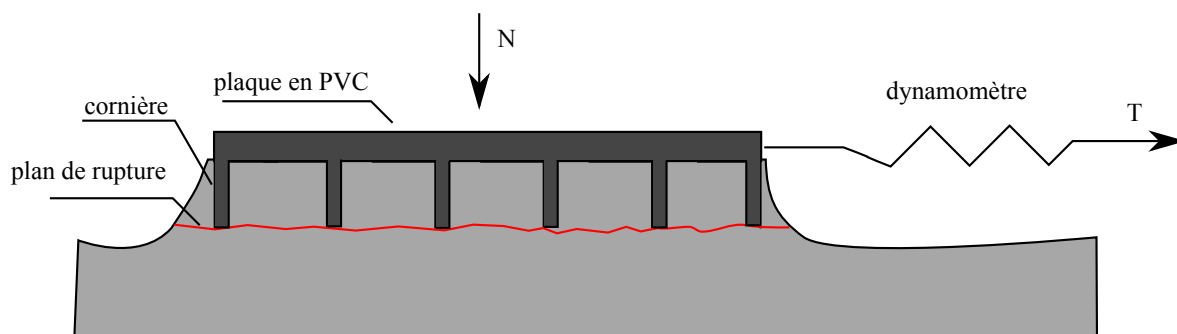


FIGURE 3.5 – **Schéma de l'expérience destinée à mesurer la cohésion des grains** lorsque de l'huile est ajoutée au sable. Une plaque de PVC dotée de cornières est posée à la surface du lit de grain. Une force verticale  $N$  lui est appliquée et on la tire horizontalement via un dynamomètre avec une force  $T$  croissante. Pour chaque concentration en huile et chaque valeur de  $N$  on relève la valeur de  $T$  au-delà de laquelle il y a rupture du milieu granulaire.

La figure 3.6 présente les résultats obtenus pour différents mélanges de sable et d'huile (huile minérale SIGMA-ALDRICH M3516) allant d'un sable sans huile puis d'un sable contenant 0.1 % en masse d'huile et jusqu'à 10%. Les différentes couleurs des symboles correspondent aux différentes concentrations. Bien que le dispositif utilisé soit assez rudimentaire et que les relevés de la force sont faits à la volée, on observe sur le graphe de gauche une loi affine entre  $N + M^*g$  et  $T$  pour chaque concentration d'huile. On peut alors en déduire les valeurs des coefficients  $\mu$  et  $\sigma_c = c/\mu$  en fonction de la concentration en huile. On remarque tout d'abord que le coefficient de frottement  $\mu$  varie peu avec la concentration en huile. On aurait pu s'attendre à ce qu'il diminue lorsque l'on ajoute de l'huile. En effet, celle-ci pourrait lubrifier légèrement les contacts entre les grains. Cependant, on constate que  $\mu$  passe de 0.57 pour un sable sec à 0.8 pour un sable contenant 10% d'huile. À l'inverse, comme prévu, la contrainte de cohésion augmente fortement avec la concentration d'huile. De plus, on retrouve bien que celle-ci est nulle pour un sable sec. On peut consulter à ce titre l'article de Halsey et Levine [1998] dans lequel les auteurs proposent une expression de la force de cohésion en fonction du volume de liquide entre les grains. Une fois cette caractérisation du mélange sable/huile effectuée, nous avons réalisé des expériences reproduisant l'instabilité de tôle ondulée pour chacun des mélanges.



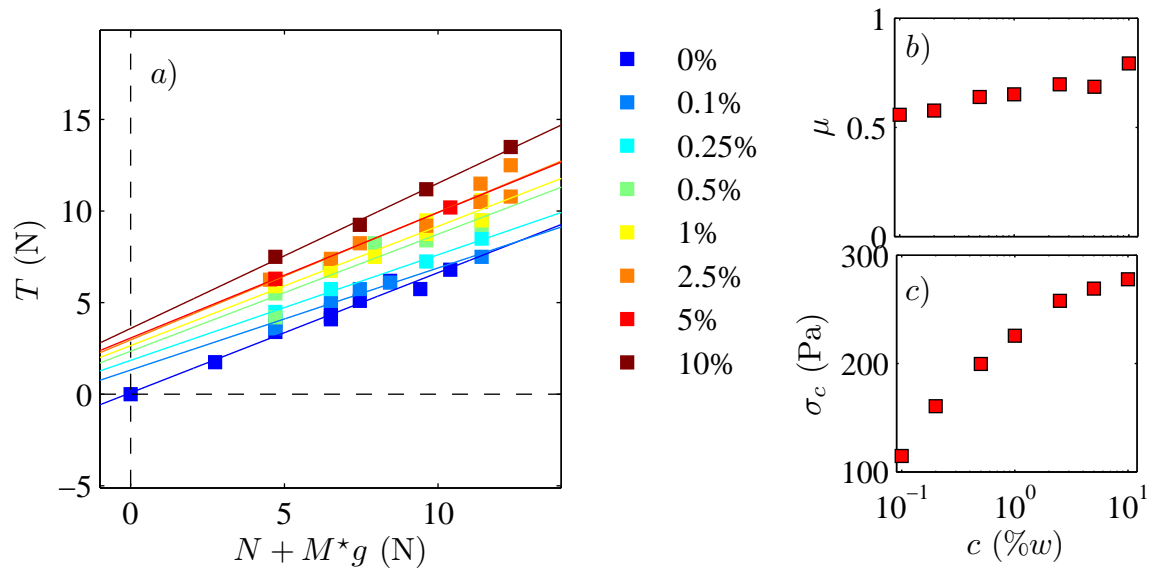


FIGURE 3.6 – a) Force tangentielle de rupture du milieu granulaire en fonction de la force normale qui lui est appliquée. Pour chaque concentration (bleu : concentration nulle, rouge : 10% en masse d’huile) on observe une relation affine entre  $T$  et  $N$ . On peut alors calculer les paramètres  $\mu$  et  $\sigma_c$  caractéristiques du milieu granulaire. Ceux-ci sont représentés sur les graphes de droite (sous-figures b) et c) ).

### 3.3 Résultats

#### 3.3.1 Caractéristiques de la tôle ondulée

L’instabilité de tôle ondulée se développe lorsque le sable est cohésif et elle présente également un seuil en vitesse. La figure 3.7 présente l’état de la piste après 200 passages de la roue à une vitesse supérieure au seuil pour une valeur de la force de cohésion  $f_c = 10 \bar{m}g$ .



FIGURE 3.7 – Illustration des rides obtenues dans les simulations pour une force de cohésion de  $10 \bar{m}g$  et une vitesse de  $2 \sqrt{gd}$  au bout de 200 tours.

Nous avons remarqué toutefois deux différences entre le sable sec et le sable avec de l’huile. En effet, l’ajout d’huile diminue la vitesse critique d’apparition des rides. Ceci peut sembler assez étrange, car l’ajout d’hydrocarbure sur une piste est revendiqué comme un moyen de lutte contre l’apparition de la tôle ondulée. Si la vitesse critique diminue lorsque l’on rajoute de l’huile, la piste devient alors plus facilement sujette à ce phénomène. Cependant, nous avons également remarqué un autre effet : plus la piste est cohésive et plus les rides mettent de temps à se former. Afin, d’être plus quantitatif, nous avons mesuré le temps de réponse à 50% du système lorsque celui-ci est instable,

c'est-à-dire, le nombre de tours nécessaires pour que les rides acquièrent une amplitude moitié de celle atteinte une fois le régime stationnaire établi. Cette quantité est assez mal définie, car le taux de croissance des rides et donc le temps qu'elles mettent à atteindre un état stationnaire dépend de l'écart à la vitesse critique. Nous avons tout de même mesuré ce temps pour des vitesses proches de la vitesse critique (en moyenne pour  $v = 1.05v_c$ ). La figure 3.8 illustre ces observations expérimentales et numériques. Sur cette figure sont tracés la vitesse critique des rides ( $v_c$ ) et le temps de réponse à 50% ( $\tau_{50\%}$ ) en fonction de la contrainte de cohésion dans les expériences et de la force de cohésion dans les simulations.

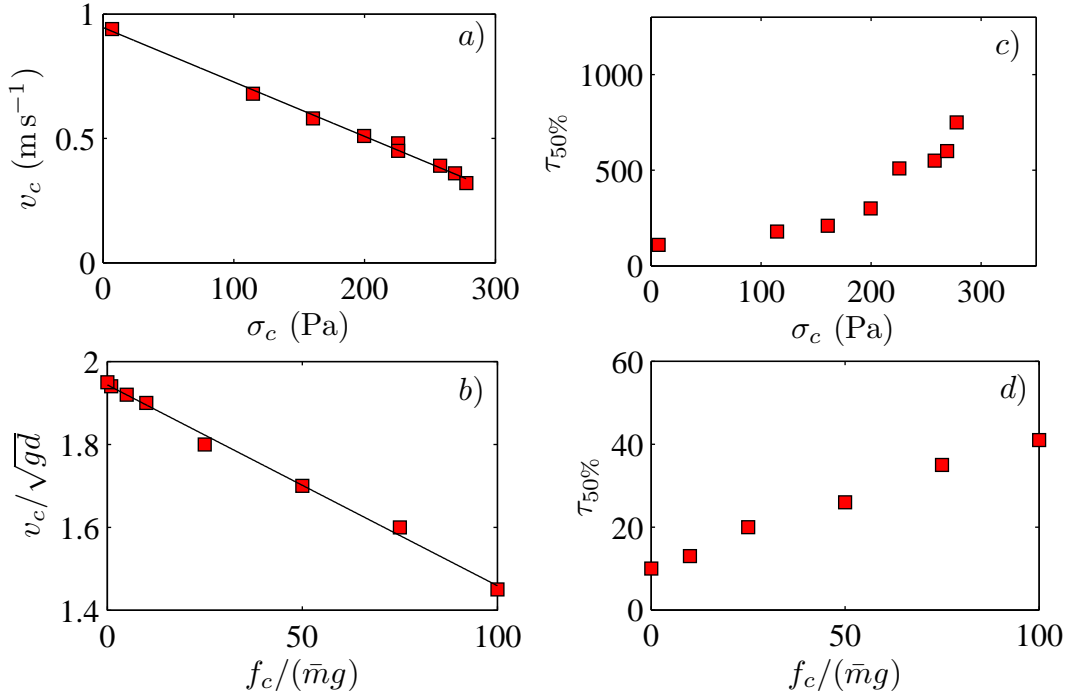


FIGURE 3.8 – À gauche, vitesse critique des rides en fonction de la contrainte de cohésion mesurée dans les expériences et les simulations. Celle-ci décroît linéairement avec la contrainte de cohésion. À droite, temps de réponse à 50% du système lorsque celui-ci est instable. On observe une forte augmentation du temps mis par les rides pour atteindre leur amplitude finale lorsque l'on ajoute de la cohésion entre les grains.

Il est assez surprenant de constater à quel point la vitesse critique diminue avec la cohésion de la piste. En effet, celle-ci passe de  $0.93 \text{ m.s}^{-1}$  pour du sable sec, dans les expériences, à  $0.3 \text{ m.s}^{-1}$  pour du sable contenant 10 % en masse d'huile. Ainsi, la vitesse critique est réduite d'un facteur 3. En parallèle, le temps de réponse à 50% du système est augmenté d'un facteur 8, passant de 100 tours pour un sable sec à 800 tours pour le sable le plus cohésif.

### 3.4 Conclusions

Bien que la mesure de la vitesse critique d'apparition de l'instabilité en présence de cohésion semblait en contradiction avec les observations de terrain, dans notre étude,

nous avons retrouvé le comportement annoncé : l'adjonction d'hydrocarbure dans le sable et donc l'augmentation de sa cohésion ralentit l'apparition de la tôle ondulée. Ce ralentissement n'est pas dû à une augmentation de la vitesse critique comme on aurait pu l'imaginer, mais est dû à une diminution du taux de croissance des rides.

Pour aller plus loin, on pourrait envisager d'effectuer de nouvelles mesures de force afin de faire un lien entre les coefficients  $\mu$  et  $\sigma_c$  qui sont intrinsèques au sable et les paramètres  $k$  et  $\gamma$  intervenant dans notre modélisation de la force de portance. De telles expériences sont envisagées dans le prolongement de ma thèse. De même, comme nous l'avons mentionné en introduction à ce chapitre, nous souhaitons mettre en lumière les mécanismes physiques communs aux instabilités de type usure ondulatoire et tôle ondulée. Pour ceci, nous envisageons de remplacer le sable par des fluides complexes dont nous maîtrisons la rhéologie.



## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES



Au cours de ces travaux de thèse, nous avons étudié expérimentalement et numériquement le comportement d'un empilement granulaire dans différentes situations.

Dans la première partie, nous avons voulu reproduire le phénomène de tôle ondulée sur les routes en sable ou en terre. La démarche suivie a été de simplifier au maximum ce problème complexe afin d'en dégager les ingrédients nécessaires et suffisants pour que l'instabilité se développe. Ainsi, nous avons soumis un lit de grains au passage répété de véhicules. Dans les premières expériences et simulations un véhicule constitué d'une simple lame inclinée est tiré à vitesse constante sur une piste constituée de grains non cohésifs. Ce véhicule extrêmement simplifié est soumis uniquement à son propre poids et à l'action du lit granulaire. Un tel dispositif suffit à reproduire l'instabilité dont nous avons étudié les propriétés. En particulier, nous avons pu montrer qu'il s'agit d'une bifurcation de type fourche super-critique faisant apparaître une vitesse critique. De plus, nous avons mis en évidence que l'instabilité peut se développer alors que le véhicule garde le contact avec la piste. Afin de construire un modèle de stabilité linéaire nous avons mesuré la force de portance agissant sur la lame dans différentes situations (en régime stationnaire et en régime sinusoïdal forcé). Nous avons également mis en évidence l'existence d'un coefficient d'efficacité d'impression de la trajectoire du véhicule dans la piste. Une expression analytique du taux de croissance des rides a pu être obtenue à partir de ces mesures. Celui-ci prédit l'existence d'une transition route lisse / route ondulée et fournit quantitativement les valeurs de la vitesse critique et de la longueur d'onde du motif. Bien que les résultats de ce modèle est très probants, celui-ci est linéaire et ne donne aucune information sur l'état stationnaire de tôle ondulée ou sur la saturation des rides. On peut alors envisager de réaliser de nouvelles expériences et simulations afin de sonder les sources de non-linéarités.

À l'issue de cette première étude, le cas simplifié d'une lame circulant à vitesse constante sur une piste non cohésive est assez bien compris. Nous avons alors rajouté un à un des ingrédients afin de rendre notre étude plus réaliste. Nous avons tout d'abord réalisé des expériences avec plusieurs patins circulant sur la piste à des vitesses et des positions différentes. Nous avons pu mettre en évidence l'existence d'un couplage entre ces véhicules dépendant de la distance les séparant. Une modification *ad hoc* de modèle linéaire développé précédemment, reproduit alors fidèlement le comportement de deux patins en interaction sur une piste. Nous avons ensuite changé de véhicule et considéré une roue rigide elle aussi soumise uniquement à son poids et à l'action des grains. La mesure de la force de portance agissant sur la roue est plus délicate à réaliser que dans le cas d'un patin. Toutefois, nos mesures préliminaires montrent que l'on peut modéliser la réaction du lit par un système ressort et amortisseur. Cette modélisation permet de prédire quantitativement la longueur d'onde la plus instable au seuil de l'instabilité. La mesure de la déformation de la piste semble indiquer qu'il existe, comme pour le patin, un coefficient d'efficacité d'impression de la trajectoire de la roue dans la piste. Celui-ci pourrait permettre de prédire l'existence d'une vitesse critique. Toutefois, il s'agit ici de résultats préliminaires sujets à caution. Il faudrait alors poursuivre cette étude de manière plus systématique en faisant varier la vitesse de la roue, la longueur du motif mais également la compacité du lit granulaire. Finalement, nous avons étudié expérimentalement et numériquement l'influence de la cohésion de l'empilement sur l'apparition de la tôle ondulée. Nous avons alors construit un nouveau dispositif expérimental plus petit dans lequel nous avons placé du sable additionné d'huile. Une

expérience de rhéologie extrêmement simple nous a permis de mesurer la contrainte de cohésion en fonction de la quantité d'huile présente dans le sable. Nous avons ainsi pu caractériser la transition route lisse / route ondulée en fonction de la cohésion de la piste. Contrairement à l'intuition que l'on aurait pu avoir, l'augmentation de la cohésion favorise l'apparition de la tôle ondulée en diminuant la vitesse critique d'apparition des rides. Toutefois, en parallèle de ceci, la vitesse d'apparition des rides (i.e. le nombre de passages nécessaires à l'établissement du motif) augmente drastiquement avec la cohésion de la piste. Ceci explique alors pourquoi l'adjonction d'hydrocarbure ou de chlorure de calcium est utilisée comme moyen de prévention contre la tôle ondulée. Afin de comprendre ces observations, il serait judicieux de mesurer la force de portance agissant sur la roue dans le cas d'une route cohésive. De plus, nous avons vu que l'instabilité de tôle ondulée ne dépendait pas de la taille des grains et qu'en ce sens le milieu granulaire peut être considéré comme un milieu continu. Nous prévoyons donc de remplacer le sable par un fluide complexe (type fluide à seuil) dont on connaît et contrôle la rhéologie. Une telle expérience pourrait permettre de dégager les mécanismes physiques fondamentaux responsables d'instabilités telles que la tôle ondulée, l'usure ondulatoire des rails ou encore l'apparition des bosses sur les pistes de ski.



# ANNEXES



# Annexe A

## Introduction

En parallèle de l'étude de l'instabilité de tôle ondulée, nous avons étudié le comportement d'un empilement de grains dans deux situations disjointes. Ces études, réalisées uniquement par le biais de simulations numériques, considèrent un empilement de grains dans une boîte rectangulaire. Nous avons ainsi simulé la vidange d'un silo de grains et l'influence des variations de température au sein de l'empilement.

Bien que l'expérience de vidange d'un silo soit extrêmement simple à réaliser et observée chaque jour dans les réserves de céréales, l'écoulement des grains au sein du silo reste assez mal compris. En effet, contrairement à un écoulement de fluide, le débit de grains à l'embouchure du silo est constant durant toute la durée de la décharge. Bien qu'une loi phénoménologique fût proposée par Berverloo (Beverloo et al. [1961]) pour décrire le débit de grains, il n'existe actuellement aucun raisonnement fondé sur la mécanique des milieux continus expliquant cette loi. La vision d'ensemble du système que fournissent les simulations numériques nous a alors permis de mieux cerner ce problème. La première annexe présente après une courte revue bibliographique les résultats que nous avons obtenus grâce aux simulations.

Ensuite, nous présentons une étude numérique sur l'effet des variations de température au sein d'une colonne de grains. Comme nous l'avons déjà mentionné, un milieu granulaire est un milieu athermique : les fluctuations thermiques sont totalement négligeables. Cependant, des variations de température se traduisent par des successions de dilatations et contractions des grains. L'effet cumulé de ces perturbations peut avoir des répercussions dramatiques sur la stabilité de l'empilement à des échelles macroscopiques. De plus, dans la plupart des expériences présentées dans la littérature une contrainte mécanique est appliqué aux grains afin de les mettre en mouvement. Celle-ci peut se faire via des vibrations ou des secousses de la boîte contenant le milieu granulaire. Faire varier la température des grains, et ainsi modifier leur rayon, constitue alors une méthode d'excitation originale et intéressante d'un milieu granulaire. Le deuxième chapitre des annexes est consacré à cette étude.



# Annexe B

## Vidange d'un silo

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>170</b>
B.1.1	État de l'art	170
B.1.2	Détails des simulations numériques	172
<b>B.2</b>	<b>Résultats</b>	<b>174</b>
B.2.1	Loi de Beverloo	174
B.2.2	Bilan d'énergie	178
B.2.3	Cartographie du silo	179
B.2.4	Profil de vitesse et de densité à la sortie de la cuve	182
B.2.5	Conclusions	186

---

## B.1 Introduction

### B.1.1 État de l'art

L'écoulement d'un milieu granulaire au travers d'une ouverture est observé dans de nombreux domaines, que ce soit dans l'industrie (la pharmaceutique, les activités minières, l'agriculture) ou bien dans des disciplines telles que la géologie, la physique ou encore l'ingénierie, cela fait ainsi plus d'un siècle que ce type d'écoulement est étudié (Hagen [1839]; Beverloo et al. [1961]). Expérimentalement, la décharge d'un silo de grains peut présenter trois régimes. Suivant le rapport entre la taille de l'orifice et la taille des grains, on peut observer : un écoulement continu, un écoulement intermittent ou un blocage complet dû à la formation de voûtes au dessus de l'orifice (Mankoc et al. [2007]). Lorsque l'ouverture est grande devant la taille des grains, on observe un écoulement continu au cours duquel le débit de grains sortant du silo est constant. Ce débit, noté  $Q$  est bien décrit par la loi expérimentale de Beverloo (Beverloo et al. [1961]) :

$$Q = C \frac{\sqrt{g}}{d^3} (R - \kappa d)^{5/2}, \quad (\text{B.1})$$

où  $R$  est le rayon de l'ouverture,  $d$  le diamètre des grains et  $C$  et  $\kappa$  sont des constantes sans dimension. Les dépendances en loi d'échelle de la relation phénoménologique B.1 vis-à-vis de  $d$ ,  $R$  et  $g$  s'interprètent à l'aide d'arguments simples. Tout d'abord, le débit  $Q$  est défini comme l'intégrale double sur la surface de l'orifice du produit de la vitesse verticale des grains par la compacité locale :

$$Q = \frac{1}{\bar{m}} \iint_S \rho v \phi dS, \quad (\text{B.2})$$

où  $\bar{m}$  est la masse moyenne des grains. Il est possible d'approcher la loi B.2 par :  $Q \sim \pi R^2 \bar{v}$ , où  $\bar{v}$  désigne la vitesse de chute moyenne des grains. Afin d'avoir une expression de la vitesse de sortie, on suppose généralement qu'il existe une région au dessus de l'orifice dans laquelle les grains sont en chute libre. Cette zone hypothétique, d'abord rapportée comme parabolique (Hagen [1839]; Brown et Richards [1970]), a récemment été plutôt décrite comme hémisphérique (Hilton et Cleary [2011]). Celle-ci possède une taille comparable à celle de l'orifice, si bien que les grains, en chute libre sur une distance de l'ordre de  $R$ , s'échappent du silo avec une vitesse moyenne  $\bar{v} = \sqrt{2gR}$ . Finalement, on obtient la loi d'échelle suivante pour  $Q$  :

$$Q \sim \sqrt{g} R^{5/2}. \quad (\text{B.3})$$

Cette relation donne cependant un débit de grains non nul lorsque la taille du trou est plus petite que la taille d'un grain. Pour remédier à cela et prendre en compte les effets de bords, on introduit une taille effective  $R_{eff}$  telle que  $R_{eff} = R - \kappa d$ . Le coefficient  $\kappa$  est sans dimension et expérimentalement sa valeur est comprise entre 0.5 et 1.5 (Nedderman et al. [1982]) bien que Zhang et Rudolph [1991] ont affirmé que la seule valeur possible pour  $\kappa$  est 0.5. Ainsi, il n'y a pas d'écoulement dès que  $R/d < \kappa$ . Pour un écoulement à deux dimensions, la loi est simplement modifiée en :

$$Q \sim \sqrt{g} (R - \kappa d)^{3/2}. \quad (\text{B.4})$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, le débit de grains  $Q$  est constant tout au long de la décharge du silo. Ceci n'est pas le cas pour un fluide visqueux pour lequel le débit dépend linéairement de la hauteur de remplissage du silo. L'explication la plus courante de ce phénomène est fondée sur l'effet Janssen (Clément et al. [1997]; Ovarlez et al. [2001, 2003]; Vanel et al. [2000]). À cause du frottement grains/grains et grains/parois le poids de la colonne de grains est dirigé sur les murs du silo. Ainsi, en remplissant un silo, la pression sur le fond augmente puis sature dès que la hauteur de grains est de l'ordre de quelques diamètres du silo. Au delà de cette hauteur caractéristique, le poids des grains que l'on rajoute dans le silo est entièrement soutenu par les parois. Ceci explique pourquoi les silos de grains ont une architecture différente de celle des cuves contenant des liquides. Un défaut de construction d'un tel silo peut alors entraîner son effondrement comme illustré sur la figure B.1.

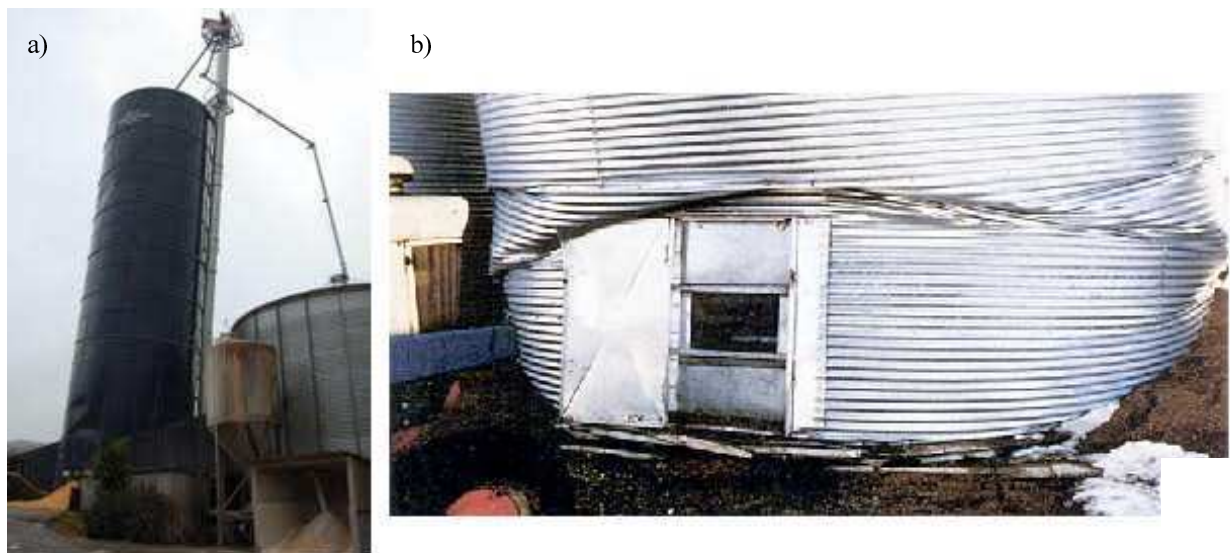


FIGURE B.1 – **Photographies de deux silos effondrés.** a) Silo menaçant de tomber à Gouézec en Bretagne. Un défaut de stabilisation du silo est à l'origine de l'effondrement de ce silo contenant 1200 tonnes de maïs (source : <http://www.letelegramme.com>). b) Silo contenant des graines de lin et qui s'est effondré au cours de sa vidange. La structure du silo n'a pas pu soutenir les efforts dus à une vidange excentrée, l'ouverture se situant sur la paroi et non au fond de la cuve. (source : <http://www.grainscanada.gc.ca>).

Au-delà d'une certaine hauteur, la pression sur le fond du silo ne dépend pas du remplissage, et donc le débit de grains non plus. Toutefois, ceci suppose deux hypothèses. La première est que l'effet Janssen est valide lors de la décharge du silo. Ceci reste à prouver. Le deuxième point est que cette interprétation suggère que le débit est imposé par la pression des grains sur le fond du silo. Cependant, en 2010 Aguirre et al. [2010] ont montré que ceci n'est pas le cas. Bien que leur expérience soit horizontale et en deux dimensions, les auteurs montrent que la pression sur le fond du silo décroît au cours du temps alors que le débit reste constante. Récemment, Perge et al. [2012] ont mesuré cette pression en différents points du fond d'un silo cylindrique et vertical au cours de la

décharge. Ils ont observé le même phénomène : la pression diminue au cours du temps et n'est donc pas constante contrairement au débit. Celui-ci n'est donc pas contrôlé par la pression sur le fond. Leur conclusion est alors que l'effet Janssen n'est pas la cause de la constance du débit de grains et que l'origine physique du débit de grains reste alors floue.

La mesure des forces agissant sur les parois et le fond de la cuve ne permettant pas d'obtenir d'information sur le mécanisme qui fixe le débit de grains, il est alors nécessaire de regarder en détail la dynamique des grains à l'intérieur du silo. Pour cela, les simulations numériques sont un outil d'étude commode. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, dans les simulations nous pouvons connaître à chaque instant l'état du système, c'est-à-dire, l'ensemble des positions et vitesses des grains ainsi que des contraintes agissant sur ceux-ci. Nous avons alors réalisé des simulations numériques de la vidange d'un silo. Ces simulations de dynamique moléculaire de sphères molles à deux dimensions reprennent l'algorithme présenté dans le chapitre 1.2.

### B.1.2 Détails des simulations numériques

La première étape consiste à reproduire fidèlement les phénomènes expérimentaux observés, notamment l'effet Janssen en statique et la constance du débit. Puis nous cartographions différentes quantités au sein du silo : tenseur des contraintes, tenseur des taux de déplacement, énergie dissipée, etc. Pour cela, nous avons adapté le code numérique utilisé pour modéliser l'instabilité de tôle ondulée. Nous avons tout d'abord ajouté des murs horizontaux et verticaux. Ceux-ci sont simplement modélisés par une force de rappel élastique :

$$\begin{cases} f = -\kappa(x_i + L/2) \text{ si } x_i < -L/2 & \text{mur de gauche} \\ f = -\kappa(x_i - L/2) \text{ si } x_i > L/2 & \text{mur de droite} \\ f = -\kappa(y_i - h_0) \text{ si } y_i < h_0 & \text{fond} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Le silo est alors à une altitude  $h_0$  et possède une largeur  $L$ . La constante de raideur  $k$  est identique à celle utilisée pour la collision entre deux grains ( $\kappa = 10^4 \bar{m}g/d$ ). Afin de modéliser correctement l'empilement statique des grains, il faut ajouter un frottement statique entre les grains d'une part et entre les grains et les murs d'autre part. La méthode des ressorts tangentiels de Cundall (Cundall et Strack [1979]) est utilisée pour calculer ce frottement statique. La constante de raideur des ressorts tangentiels est  $k_t = 3300 \bar{m}g/d$ . Ainsi la force de frottement sature à  $\mu F_n$  dès que le déplacement tangentiel d'un grain sur l'autre dépasse typiquement un millièème de rayon d'un grain. L'état initial est créé en positionnant les grains sur un réseau rectangulaire avec un léger bruit dans leur position et leur vitesse initiale. On laisse ensuite tomber les grains sous l'action de la gravité. Une fois que l'énergie cinétique de l'ensemble des grains a atteint une valeur stationnaire, on peut commencer la vidange. La compacité de l'empilement créée est de l'ordre de 0.8 et n'a pas d'influence sur la dynamique de la vidange. Pour réaliser cette vidange, il suffit de faire un « trou » dans le fond du silo. Concrètement, on supprime la force de rappel élastique du fond pour les grains présents au niveau de l'ouverture, *i.e.* tels que  $|x_i| < R$ . On rajoute également deux grains aux extrémités de l'orifice afin de raccorder correctement la partie rigide du fond au trou. En effet,



la singularité introduite par le trou peut causer des problèmes de non-continuité de la force agissant sur les grains au voisinage du trou. Ces deux grains dont les positions sont fixes au cours de la simulation sont représentés sur la figure B.2.



FIGURE B.2 – **Zoom sur le fond du silo.** Deux grains sont ajoutés à l'extrémité de l'ouverture afin d'éviter tout problème lié à la discontinuité du fond.

Les grains peuvent alors s'échapper par l'ouverture ainsi créée. On mesure le débit en comptant simplement le nombre de grains dont l'altitude est inférieure à l'altitude du fond du silo. Selon les cas, les grains sortis de la cuve sont soit réintroduits au sommet du silo via des conditions aux limites périodiques, soit oubliés, c'est-à-dire qu'on leur impose une position en dehors de la cuve et on ne résout plus les équations de la dynamique qui leur sont associées. Ce dernier cas ce rapproche des expériences réalisées, alors que le premier permet d'étudier le système dans un régime stationnaire, ce qui permet de moyenner dans le temps les différentes grandeurs d'intérêt. Bien sûr, lorsque l'on réintroduit les grains au sommet de l'empilement on injecte de l'énergie dans le système. Il faut alors s'assurer que cette énergie est dissipée dans une région localisée autour du sommet du silo et que cela n'affecte pas la valeur du débit à la base du silo. La figure B.3 présente un exemple typique de silo en 2D rempli de grains avant et après l'ouverture du silo. Cundall

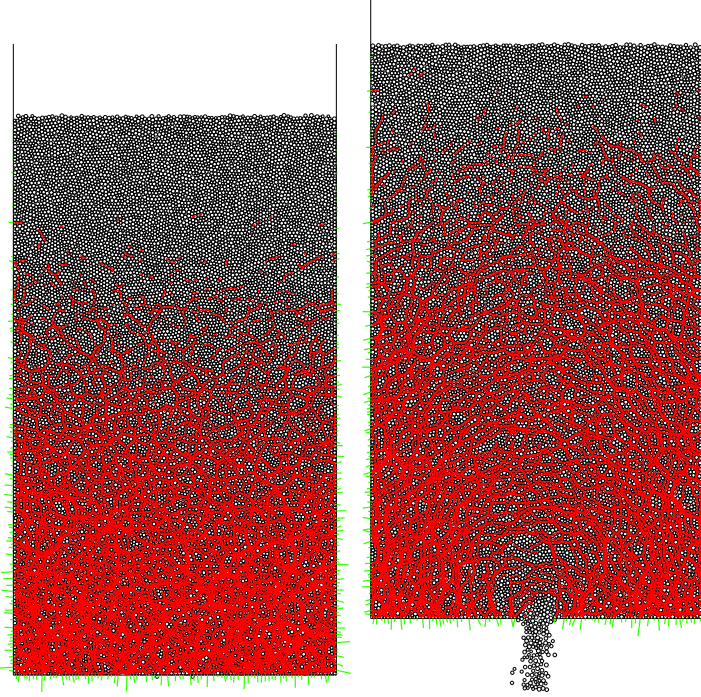


FIGURE B.3 – Empilement de  $2.10^4$  grains dans un silo de 100 grains de large. Les traits rouges correspondent aux chaînes de forces. a) Empilement avant l'ouverture du silo. b) Image prise au cours de la vidange sans conditions aux limites périodiques. On note que les chaînes de forces (en rouge) prennent la forme d'une voûte au niveau de l'ouverture. Les traits verts symbolisent les forces de contact entre les grains et les parois.

## B.2 Résultats

### B.2.1 Loi de Beverloo

Le premier résultat important de notre étude est que l'on retrouve bien l'indépendance du débit de grains vis-à-vis de la hauteur de la colonne. Les figures B.4a) et b) présentent le nombre de grains sortis ( $N_{b_{sortis}}$ ), ainsi que le débit de grains au cours de la vidange d'un silo contenant 20000 grains, d'une largeur  $L = 100d$  avec une ouverture de rayon  $R = 6d$ . Dans cette simulation les grains ne sont pas réintroduits au sommet de la cuve et donc celle-ci se vide au cours du temps. On observe alors que le débit de grains est constant et vaut  $Q = (67.2 \pm 0.5)\sqrt{g/d}$  jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de grains directement à la verticale de l'ouverture. On retrouve bien la caractéristique principale de la vidange d'un silo de grains, à savoir que le débit ne dépend pas du temps et donc de la hauteur de l'empilement. Outre la mesure du débit, nous avons également mesuré la force verticale agissant sur le fond de la cuve et sur les parois. Ces forces sont représentées sur la figure B.4c). On constate tout d'abord que la force verticale agissant sur les parois n'est pas nulle. Ceci signifie que l'on observe bien un effet Janssen dans nos simulations. De plus, avant l'ouverture du silo, la somme des forces verticales agissant sur le fond et les parois est bien égale au poids des grains contenus dans le silo. Puis, lorsque le silo est ouvert, la force agissant sur les parois augmente au détriment de celle ressentie par le fond. En effet, lorsque la cuve se vide, les grains glissent le long

des parois et les contacts sont tous mobilisés en direction du sommet de la cuve. Tout comme dans l'expérience de Perge et al. [2012], nous observons que la force qui s'exerce sur le fond du silo diminue au cours du temps. On ne peut donc pas supposer que le débit de grain, qui est constant, soit contrôlé par la pression sur le fond du silo.

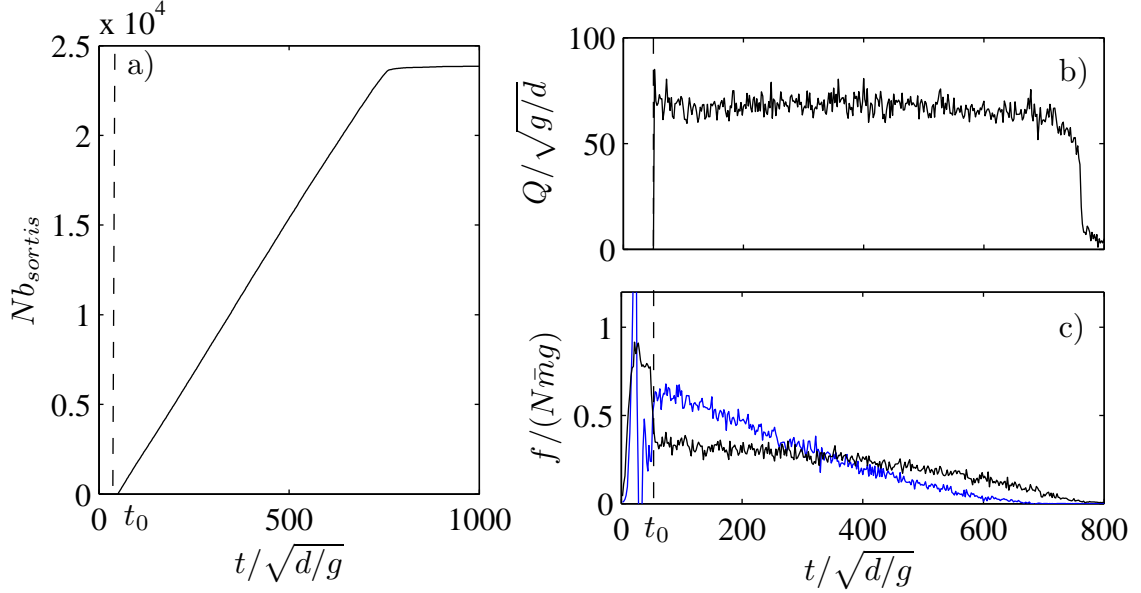


FIGURE B.4 – **Résultats obtenus au cours d'un vidange de 20000 grains au travers d'une ouverture de 12 diamètres de grains.** Les premiers instants de la simulation correspondent à la formation de l'empilement initial. La vidange commence au bout de  $t_0 = 30 \sqrt{d/g}$ . a) Nombre de grains sortis du silo en fonction du temps. b) Débit de grains à la sortie du silo, mesuré au cours du temps. Le débit est constant pendant la vidange et vaut  $Q = 67.2 \pm 0.5 \sqrt{g/d}$ . c) Force verticale agissant sur les parois du silo (en bleu) et sur le fond (en noir). On remarque que ces quantités diminuent au cours du temps. Ainsi, le débit de grains n'est pas fonction de la pression sur le fond du silo.

Afin d'avoir une vision plus complète de la dynamique des grains à l'intérieur du silo, nous avons mesuré le tenseur des contraintes local ainsi que l'énergie dissipée localement. Pour effectuer ces mesures, il a été nécessaire de faire des moyennes dans le temps et donc de travailler en régime stationnaire avec des conditions aux limites périodiques. La figure B.5 présente alors le débit de grains et la force subit par le fond et les parois au cours du temps lorsque l'on impose des conditions aux limites périodiques selon l'axe vertical.

On constate en premier lieu que la somme des forces verticales est toujours égale au poids des grains présents dans la colonne. Ceci signifie donc que l'énergie que l'on injecte dans le système, en réintroduisant les grains au sommet, est minime. De plus, on remarque que l'on obtient une valeur du débit de  $(66.4 \pm 0.2) \sqrt{g/d}$ , identique aux incertitudes près à celle que l'on mesure en l'absence des conditions aux limites périodiques. On peut alors raisonnablement supposer que celles-ci ne perturbent pas le système dans son ensemble et n'ont notamment aucun effet sur le débit de grains. Celui-ci peut alors être mesuré avec précision, pour cela il suffit de laisser la simulation tourner suffisamment longtemps afin de moyenner les mesures.

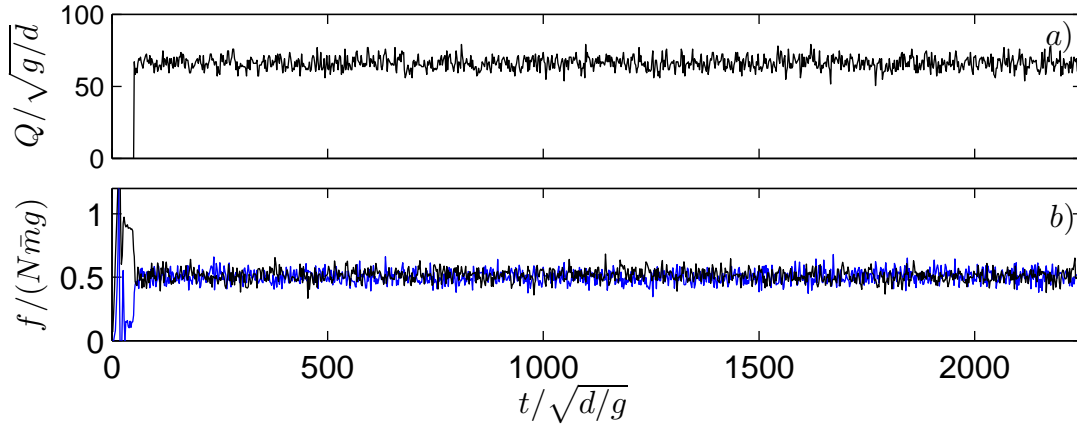


FIGURE B.5 – a) **Débit de grains à la sortie du silo**, mesuré au cours du temps lorsqu'on réinjecte les grains sortis au sommet de l'empilement. Ce débit est constant et vaut  $(66.4 \pm 0.2) \sqrt{g/d}$ , ce qui est identique à celui mesuré en l'absence de conditions aux limites périodiques. b) **Forces verticales agissant sur les parois** (courbe bleue) **et sur le fond** (courbe noire).

Enfin, afin de vérifier que le débit de grains ne dépend pas de la hauteur de la cuve et vérifie la loi expérimentale de Beverloo, nous avons réalisé différentes simulations. Pour les premières, la largeur de la cuve et de l'ouverture ont été gardées constantes (respectivement  $40d$  et  $12d$ ) et nous avons fait varier le nombre de grains présents de 1000 à 30000. La hauteur de la colonne de grains varie ainsi de  $25d$  à  $750d$ . Sur la figure B.6a) nous avons tracé le débit de grains pour chacun des remplissages de la cuve en fonction de la hauteur de la colonne. On trouve, comme dans les simulations précédentes que le débit ne dépend pas de la hauteur de la cuve. D'autres simulations ont également été effectuées afin de vérifier que nos simulations reproduisent la loi expérimentale de Beverloo. Pour cela, le rayon  $R$  de l'ouverture a été varié de 3 à 9 diamètres de grains. Nous avons également simulé des ouvertures plus étroites. Cependant, une ouverture plus étroite que  $2d$  provoque le blocage de l'écoulement. Nos simulations ne nous ont pas permis d'observer le régime d'écoulement intermittent. Peut-être aurait-il fallu introduire du « bruit » dans le système afin de le débloquent, tout comme dans les expériences de Janda et al. [2009] où des vibrations du silo permettent de débloquent l'écoulement. La figure B.6 présente alors le débit en fonction de  $(R - \kappa d)$ , où le coefficient  $\kappa$  a été ajusté afin d'obtenir une droite en échelle logarithmique. Nous avons alors trouvé :  $\kappa = 0.5$  et la pente de la loi d'échelle ainsi obtenue vaut bien  $3/2$  comme prédit par la loi de Beverloo à deux dimensions.

Les mesures effectuées nous permettent d'affirmer que nos simulations reproduisent fidèlement la décharge d'un silo. Nous avons retrouvé :

- l'effet Janssen lorsque l'empilement est statique,
- le fait que le débit est constant,
- le fait que la pression sur le fond évolue au cours de la décharge,
- la loi de Beverloo.

Nous pouvons alors utiliser ces simulations pour sonder le comportement des grains

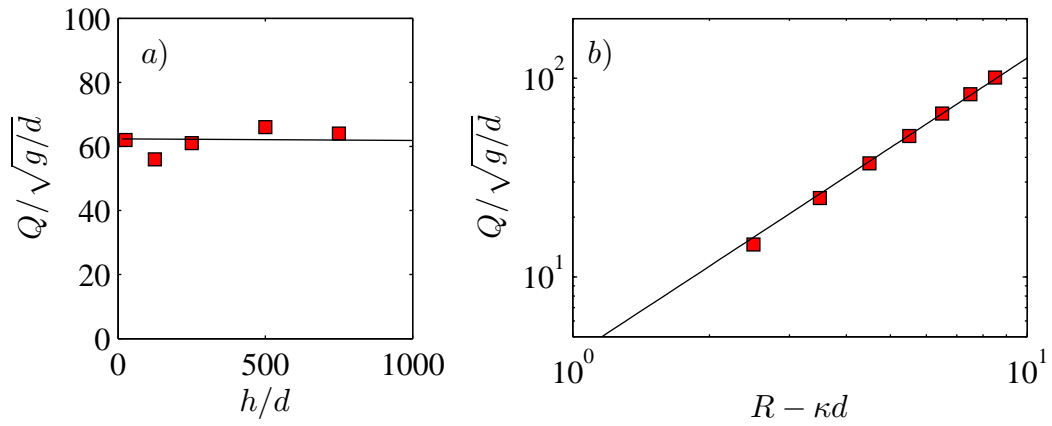


FIGURE B.6 – a) **Débit de grains  $Q$  en fonction de la hauteur de remplissage du silo.** La débit est indépendant de la hauteur. b) **Débit de grains en fonction de  $(R - \kappa d)$  avec  $\kappa = 0.5$ .** En ajustant  $\kappa$  on obtient une droite et la pente de cette droite vaut alors  $3/2$  comme prédit par la loi de Beverloo.

à l'intérieur du silo. Nous nous intéressons notamment au bilan d'énergie au sein de la colonne.

### B.2.2 Bilan d'énergie

Le travail de la force de pesanteur est le moteur de la vidange. Nous pouvons alors espérer qu'une étude énergétique du système permette de connaître le débit des grains. Faisons alors un bilan d'énergie sur le système ouvert constitué des grains contenus dans le silo :

$$E_m(t + dt) = E_m(t) - Pdt - \sum_{\text{grains sortis pendant } dt} e_m^i, \quad (\text{B.6})$$

où  $E_m$  est l'énergie mécanique des grains à l'intérieur du silo,  $P$  la puissance dissipée à l'instant  $t$  et  $e_m^i$  l'énergie mécanique du grain  $i$ . Faisons alors l'hypothèse que les grains sortant du silo ont tous la même vitesse  $\bar{v}$  ce qui permet d'une part de simplifier les calculs et de donner une interprétation aux lois d'échelles de la loi de Beverloo d'autre part. Ainsi, tous les grains sortant de la cuve ont la même énergie cinétique,  $\bar{e}_c$  à l'instant où ils sortent. Ils ont tous la même énergie potentielle de pesanteur que l'on peut fixer à 0. De plus, les grains sortant de la cuve ne se touchent quasiment jamais. On peut donc assimiler leur énergie mécanique à la seule somme de leur énergie cinétique et potentielle de pesanteur. Cette approximation néglige alors l'énergie potentielle de répulsion élastique et l'énergie potentielle contenue dans les ressorts tangentiels. En fait, cette approximation peut être étendue au système entier. En effet, si l'on compare les différentes énergies potentielles entre elles au cours d'une vidange (voir figure B.7), on constate que l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  domine largement les autres.

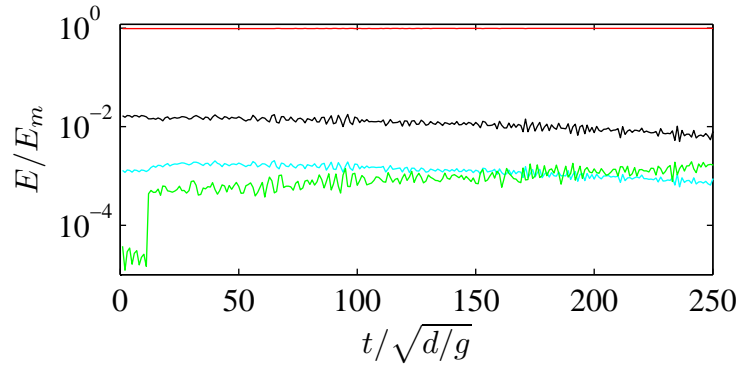


FIGURE B.7 – **Comparaison des différentes énergies au cours de la vidange du silo.** Les rapports entre l'énergie mécanique du système et les différentes énergies potentielles et cinétique sont tracés en fonction du temps. La courbe en rouge représente l'énergie potentielle de pesanteur ; celle en noir, l'énergie potentielle élastique de répulsion ; la courbe bleue, l'énergie potentielle élastique contenue dans les ressorts tangentiels et pour finir la courbe verte représente l'énergie cinétique des grains. On remarque que toutes les énergies sont négligeables devant l'énergie potentielle de pesanteur.

Ainsi, l'énergie mécanique des grains dans la colonne peut se résumer à leur énergie potentielle de pesanteur. De même, l'énergie mécanique des grains sortant du silo s'apparente à leur seule énergie cinétique. On peut alors réécrire l'équation B.6 de la façon suivante :

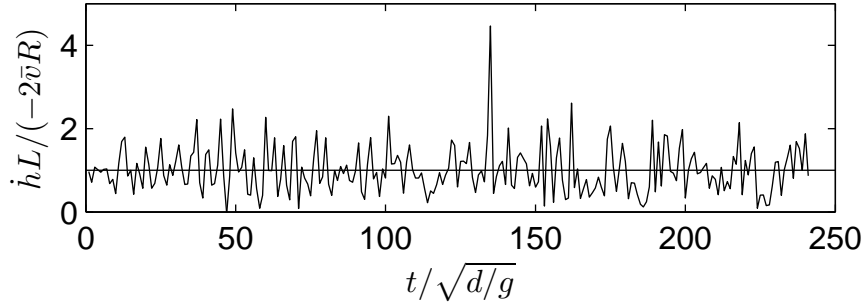


FIGURE B.8 – **Rapport entre  $\dot{h}L$  et  $2R\bar{v}$**  mesuré au cours d’une décharge de silo avec des conditions aux limites périodiques. Ce rapport fluctue fortement mais vaut en moyenne  $1.01 \pm 0.03$ , on peut donc remplacer  $\dot{h}L$  par  $2R\bar{v}$  dans les équations.

$$\frac{dE_p}{dt} = -P - Q \frac{1}{2} \bar{m} \bar{v}^2. \quad (\text{B.7})$$

Dans cette équation on voit intervenir le débit de grains ainsi que leur vitesse  $\bar{v}$  et masse moyenne  $\bar{m}$ . L’énergie potentielle de pesantier des grains vaut :  $E_p = L\rho\phi gh^2/2$ , où  $h$  est la hauteur de l’empilement. On a alors :  $\frac{dE_p}{dt} = L\rho\phi g h \dot{h}$ . Dans cette expression, on peut remplacer  $\dot{h}L$  par  $-2R\bar{v}$ <sup>1</sup> sous réserve que l’écoulement des grains soit incompressible. Comme nous le verrons dans la suite, ce n’est pas le cas. La compacité au niveau de l’ouverture est plus faible que celle mesurée en volume. Cependant, bien que très bruité, le rapport entre  $\dot{h}L$  et  $2R\bar{v}$  représenté sur la figure B.8, vaut  $1.01 \pm 0.03$ . On peut également remplacer  $Q$  par :  $(\phi 2R\bar{v})/(\frac{\pi}{4}d^2)$ . L’expression B.7 devient alors :

$$P = \rho\phi g R \bar{v} h - \phi \rho R (\bar{v})^3 \quad (\text{B.8})$$

La vitesse de sortie des grains est donc contrôlée par la dissipation d’énergie au sein de la colonne. De manière très surprenante, le débit qui ne dépend pas de la hauteur apparaît alors comme la différence de deux quantités dépendant de la hauteur. En effet, de façon schématique, le débit est donné par la différence entre la perte d’énergie potentielle (proportionnelle à  $h$ ) et l’énergie dissipée (également fonction de  $h$ ). On peut donc supposer que ce qui fixe le débit c’est la puissance dissipée non pas dans l’ensemble de la colonne mais dans une zone localisée dont la taille ne dépend pas de la hauteur de grains. Ceci fait immédiatement penser à la zone de chute libre introduite par Hagen [1839]. Nous avons alors réalisé différentes cartographies du silo afin notamment d’identifier cette zone.

### B.2.3 Cartographie du silo

Sur la figure B.9 nous avons représenté trois vues d’un silo contenant 20000 grains avec une ouverture d’un rayon de  $5d$ . Ces trois vues représentent respectivement l’énergie dissipée par frottement, par collision et la somme de ces deux énergies. Ces mesures

1. Le signe moins vient du fait que la vitesse de sortie  $\bar{v}$  a été définie de manière positive.



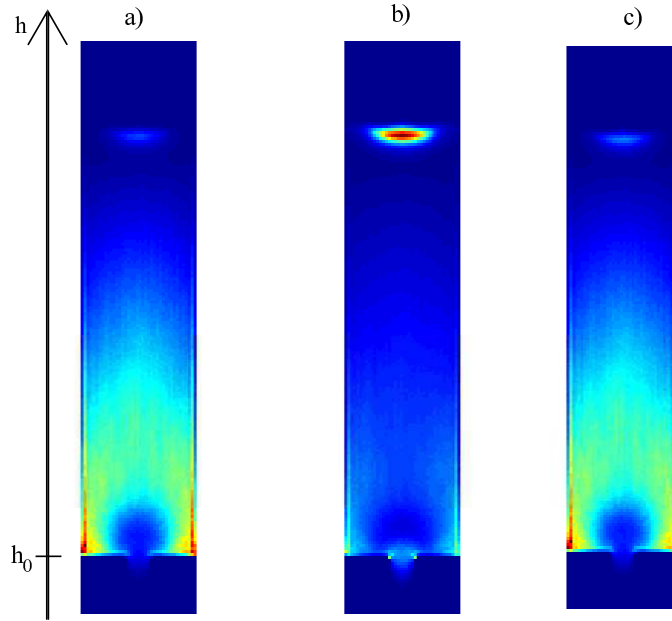


FIGURE B.9 – À gauche, cartographie de la puissance dissipée par frottement au sein de l'écoulement. Au milieu puissance dissipée par collision. À droite, puissance dissipée totale. On remarque alors que la dissipation est essentiellement d'origine frictionnelle et qu'elle met en évidence la présence d'une zone sans dissipation au-dessus de l'ouverture.

ont été réalisées en présence de conditions aux limites périodiques et en moyennant les résultats sur un temps de  $3000\sqrt{d/g}$ . Pour fixer les idées, ce temps correspond au temps nécessaire pour effectuer quatre vidanges successives du silo. On aperçoit clairement qu'il existe une zone, vers le sommet de l'empilement, soumise à la pluie de grains réintroduits par les conditions aux limites périodiques. Cette zone est toutefois assez petite comparée à la taille du silo, de plus elle se trouve en haut de la colonne suffisamment loin de la région soumise à l'influence de l'ouverture.

Nous constatons également que la dissipation d'énergie est essentiellement d'origine frictionnelle. L'empilement évoluant assez lentement, les collisions entre grains sont assez faibles au sein du silo et ne dissipent guère d'énergie comparé aux forces de frottement. De manière plus surprenante, nous pouvons remarquer que la dissipation d'énergie se produit essentiellement vers les coins du silo. De plus, on peut clairement définir une zone centrée sur l'orifice dans laquelle il n'y a quasiment pas de dissipation. Dans cette région de faible dissipation les grains ne sont pas ralentis dans leur chute. Elle s'identifie alors avec la zone de chute libre introduite par Hagen [1839]. Il s'agit ici, à notre connaissance, de la première visualisation directe de cette zone.

Nous avons également mesuré le tenseur des contraintes local lors cette simulation. La figure B.10 présente alors quatre représentations du silo montrant respectivement : la compacité et les lignes de courant de l'écoulement des grains, le champ de pression ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ), la contrainte de cisaillement ( $\sigma_{xy} + \sigma_{yx}$ ) et finalement l'intensité des chaînes de forces ainsi que leur direction. La figure B.10a) montre que la compacité est constante



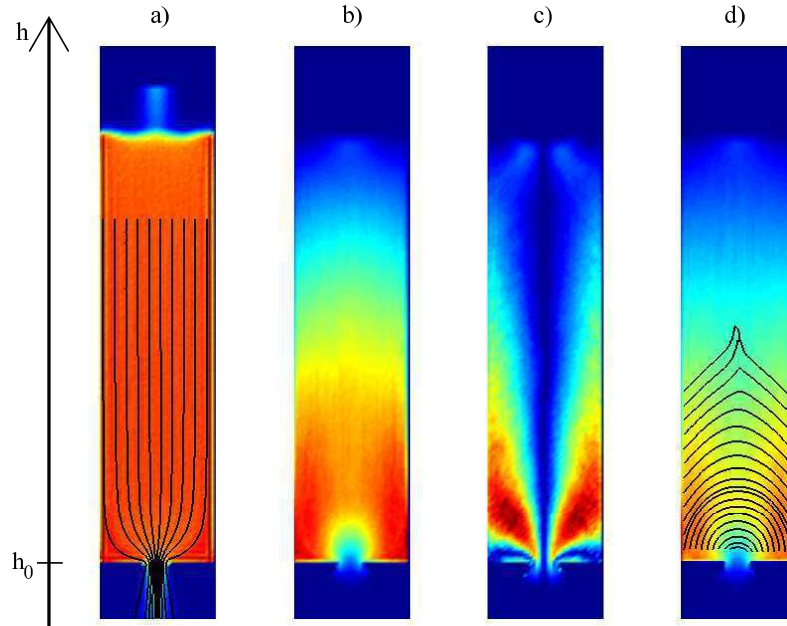


FIGURE B.10 – **Représentations du silo.** a) Superposition des lignes de courant de l'écoulement et de la compacité locale (en échelle de couleur). b) Champ de pression, on observe clairement une zone autour de l'ouverture dans laquelle la pression chute drastiquement. c) Champ de contrainte tangentielle. Superposition de la direction (courbes noires) et de l'intensité (échelle de couleur) des chaînes de forces moyennes. On note que les chaînes de forces prennent la forme de voûte au-dessus de l'ouverture.

au sein du silo. Bien que cela ne soit pas évident sur la figure B.10a), la compacité diminue autour de l'ouverture, nous étudions cela plus en détail dans la partie suivante. De plus, on constate que les lignes de courant des grains sont essentiellement verticales et qu'elles se resserrent à l'approche du fond de la cuve. La figure B.10b) montre clairement tout comme la figure B.9 l'existence d'une zone de chute libre au sein de laquelle la pression chute, signe que les grains ne se touchent pas dans cette zone. Sur la figure B.10c) on aperçoit un fort cisaillement des grains le long de deux bandes symétriques inclinées. On peut noter également que la contrainte tangentielle locale est nulle le long de l'axe de symétrie du silo. Afin de calculer la direction des chaînes de forces, nous avons diagonalisé le tenseur des contraintes local afin de trouver ses directions propres. Nous avons représenté sur la figure B.10d) la direction et l'intensité des chaînes de forces. On constate que, partant du fond du silo, les chaînes de forces sont effectivement en forme d'arches circulaires centrées sur l'orifice. Puis en montant dans la colonne, ces chaînes de forces prennent une allure triangulaire et viennent s'appuyer sur les parois de la cuve.

Ces mesures permettent d'avoir une meilleure vision de l'ensemble du silo. En effet, nous pouvons confirmer l'existence d'une zone de chute libre. Comme nous l'avons vu précédemment, l'origine physique du débit de grains est directement liée à la taille de cette région. De plus, la vitesse et la compacité des grains, au sein de celle-ci, varient sensiblement par rapport au reste de la colonne. Nous pouvons donc nous intéresser

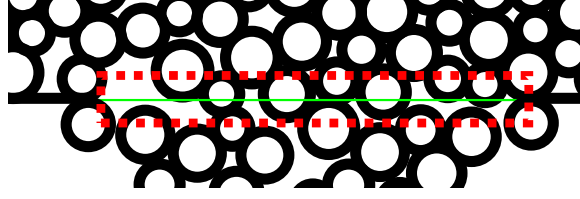


FIGURE B.11 – Vue des grains passant au travers de l'ouverture du silo. La compacité et la vitesse des grains sont mesurées dans la zone délimitée par le rectangle en pointillés rouges.

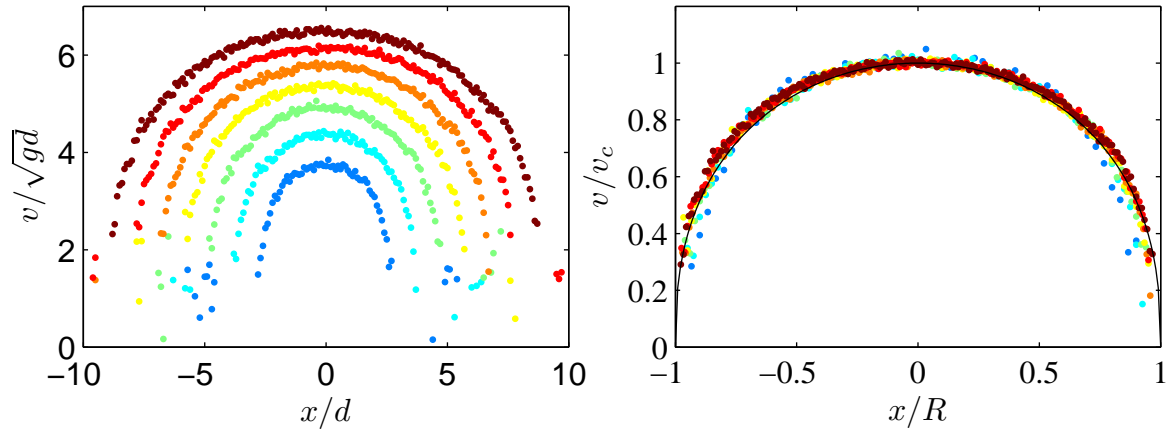


FIGURE B.12 – a) **Profils de vitesse de l'écoulement de grains** pour des rayons allant de  $3d$  à  $9d$ . Ces profils de vitesse ont la même allure. Il est alors possible d'obtenir une courbe maîtresse en normalisant par la vitesse maximale et par le rayon du trou (figure b)). La courbe en trait noir correspond à la fonction d'équation  $y = \sqrt{1 - (x/R)^2}$ , une telle forme modélise bien le profil de vitesse.

plus en détail à cette zone et mesurer avec précision la vitesse ainsi que la compacité au niveau de l'orifice de sortie.

#### B.2.4 Profil de vitesse et de densité à la sortie de la cuve

La vitesse des grains ainsi que la compacité de l'empilement ont été mesurées dans une zone centrée sur l'orifice représenté sur la figure B.11. Ces mesures ont été effectuées lors de décharges de silos en conditions aux limites périodiques. Nous avons alors pu moyenner dans le temps les champs de vitesse et de compacité.

La figure B.12a) présente différents profils de vitesse pour des ouvertures allant de  $6$  à  $18d$ , soit un rayon variant de  $3$  à  $9d$ . Ces profils sont tracés en fonction de la distance  $x$  mesurée à partir du centre de l'ouverture. Ces profils de vitesse semblent homothétiques. En effet, si l'on trace pour chaque taille d'ouverture le profil de vitesse divisé par la vitesse maximale en fonction d'une distance réduite :  $x/R$  (figure B.12b)), toutes les courbes se superposent. La courbe maîtresse sur laquelle se réunissent tous les profils de vitesse peut être modélisée par une courbe d'équation :

$$y = \left(1 - (x/R)^2\right)^{\nu_v}, \quad (\text{B.9})$$

avec  $\nu_v = 0.38 \pm 0.05$ . L'utilisation de ce genre de fonction est motivée par les résultats récents de la communauté sur les écoulements confinés de matériaux divisés (Mansard et Colin [2012]). Lorsque le système n'est large que de quelques grains comme c'est le cas de l'ouverture de notre silo, il n'y a plus de découplage d'échelle entre la taille des grains et celle du système. Pour rendre compte de l'écoulement il est alors nécessaire de modifier les équations en introduisant une longueur intermédiaire correspondant à la portée des réarrangements dans l'écoulement. Les profils de vitesse prédits par ce type de loi dite non-locale, récemment validée pour des matériaux granulaires (Kamrin et Koval [2012]) sont très similaires à la fonction d'ajustement B.9 que nous proposons. Ainsi, le profil de vitesse  $v$  obéit à la loi suivante :

$$v = v_c \left(1 - (x/R)^2\right)^{\nu_v} \quad (\text{B.10})$$

où  $v_c$  est la vitesse des grains au centre de l'ouverture. Cette vitesse maximale est tracée en fonction de  $R$  sur la figure B.13. Elle obéit à une loi de puissance du type  $v = \sqrt{2g\gamma R}$ , où  $\gamma$  est un coefficient sans dimension et vaut 2.25.

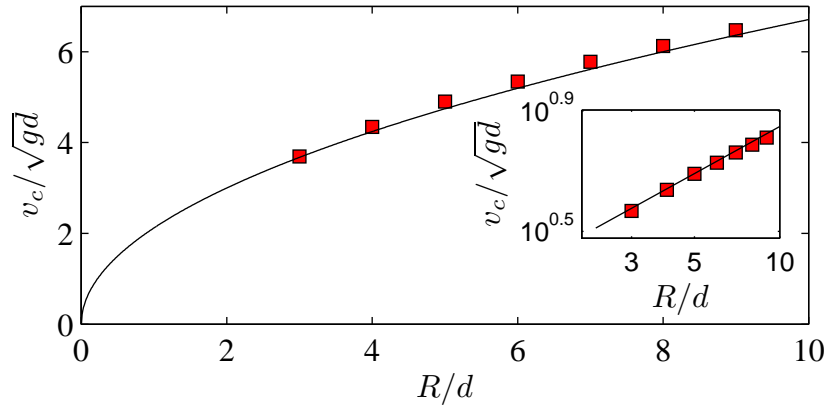


FIGURE B.13 – **Vitesse de sortie maximale des grains  $v_c$  en fonction de la taille de l'ouverture.** On obtient une loi en racine carrée signifiant qu'avant de sortir du silo les grains sont en chute libre sur une distance  $\gamma R$ .

Ces résultats peuvent alors être interprétés par une chute libre des grains sur une hauteur  $\gamma R(1 - (x/R)^2)^{2\nu_v}$  car  $\nu_v = 0.38 \simeq 0.5$  ce qui montre que la zone de chute libre a une forme quasi-parabolique. La taille de cette zone parabolique, qui est proportionnelle à  $R$ , peut être comparée à la taille de la zone de faible dissipation que l'on a identifiée précédemment. La figure B.14 représente le profil de l'énergie dissipée mesurée le long de l'axe de symétrie de la colonne. Les courbes en pointillés rouges symbolisent le fond du silo et l'altitude de la zone de chute libre calculée à partir de la vitesse maximale de sortie des grains. On peut alors remarquer que cette dernière droite délimite clairement la limite supérieure d'un plateau dans l'énergie dissipée. Ainsi, la mesure du profil de vitesse est bien compatible avec la mesure locale de la dissipation d'énergie.

À l'instar de ce que nous venons de présenter pour la vitesse, nous pouvons calculer le profil de compacité à la sortie du silo. La figure B.15 représente ce profil de compacité pour les différentes tailles d'ouverture simulées.

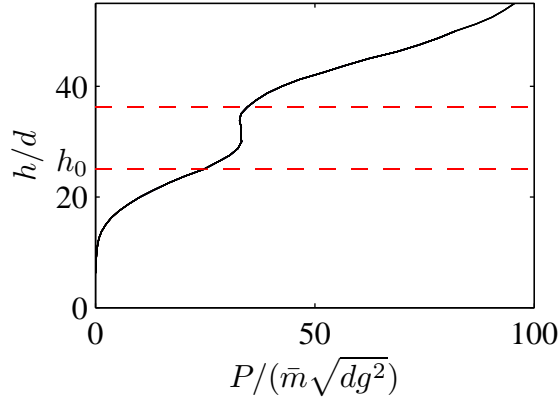


FIGURE B.14 – **Profil de la dissipation d'énergie mesuré le long de l'axe de symétrie du silo.** Ce profil contient un plateau dont la limite supérieure est à la hauteur  $\gamma R$  calculée via les mesures de vitesse.

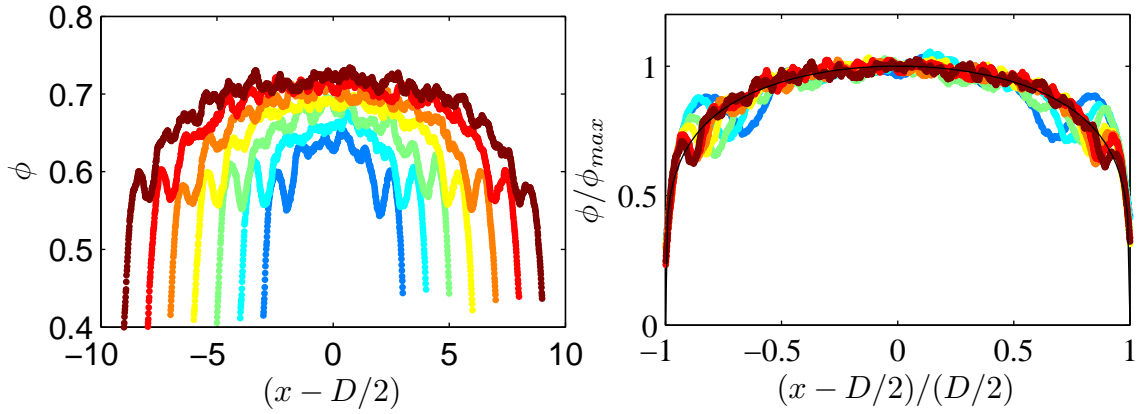


FIGURE B.15 – **a) Profils de compacité de l'écoulement de grains** pour des rayons d'ouverture allant de  $3d$  à  $9d$ . Ces profils de compacité ont tous la même allure. Il est alors possible de les superposer en traçant le profil de compacité normalisé par la compacité maximale en fonction de  $x/R$  (figure b)). La courbe en trait noir correspond à la fonction d'équation  $y = 1 - (x/R)^{0.22}$ , une telle forme modélise bien le profil de compacité.

Sur la figure B.15 les profils de compacité sont tracés en fonction de  $x$ . On constate alors deux choses. La première est que les profils de compacité dépendent de la position  $x$ . Cette dépendance était attendue puisque en dehors du jet de grain, la compacité doit être nulle. Le deuxième point remarquable est que la compacité dépend également de la largeur de l'ouverture. De plus, à l'instar des profils de vitesse, on peut superposer les profils de compacité en traçant  $\phi/\phi_{max}$  (où  $\phi_{max}$  est la compacité maximale mesurée au centre du profil) en fonction de  $x/R$  (figure B.15b)). Nous pouvons alors chercher une expression du profil de compacité sous la forme suivante :

$$\phi(x, R) = \phi_{max}(R)(1 - x/R)^{\nu_\phi}, \quad (\text{B.11})$$

où  $\nu_\phi$  est un coefficient sans dimension. La meilleure approximation donne  $\nu_\phi = 0.22$ . La figure B.16 représente la compacité maximale  $\phi_{max}$  en fonction du rayon  $R$  de

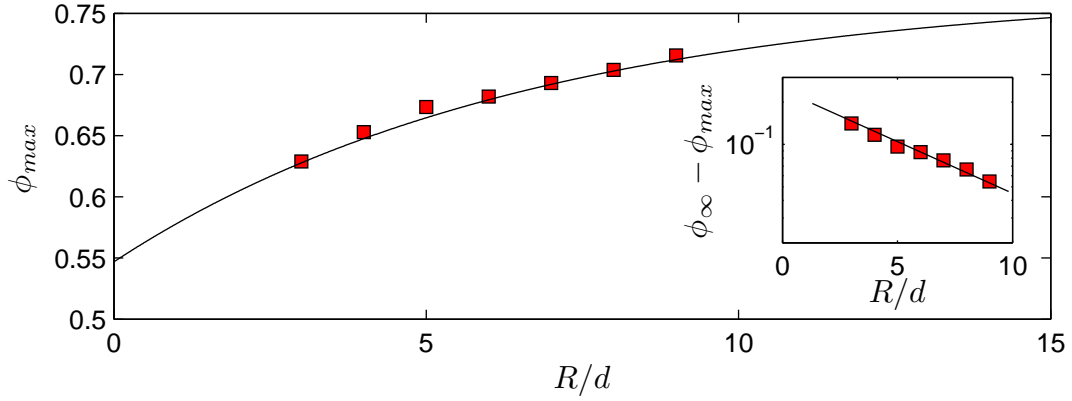


FIGURE B.16 – **Compacité maximale mesurée au centre du profil en fonction du rayon de l'ouverture.** On peut modéliser cette compacité par une loi exponentielle.

l'ouverture. Celui-ci est une fonction croissante de  $R$  et même si l'on ne l'observe pas clairement sur la figure B.16,  $\phi_{max}$  doit saturer vers une valeur  $\phi_{\infty}$ . La meilleure estimation donne  $\phi_{\infty}$  à 0.78. Cette compacité est intermédiaire entre le *random loose packing* et le *random close packing* (Meyer et al. [2010]). En traçant  $\phi_{\infty} - \phi_{max}$  en fonction de  $R$ , on constate que  $\phi_{max}$  évolue exponentiellement (encart de la figure B.16). Nous pouvons donc compléter l'expression du profil de compacité :

$$\phi(x, R) = \phi_{\infty}(1 - \alpha \exp(-R/R_0))(1 - (x/R)2)^{\nu_{\phi}}, \quad (\text{B.12})$$

dans laquelle les coefficients valent :  $\phi_{\infty} = 0.78$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $R_0 = 5d$  et  $\nu_{\phi} = 0.22$ . Grâce aux modélisations que l'on vient de faire de la compacité et la vitesse au niveau de l'ouverture du silo, il est possible d'obtenir une expression *semi-empirique* du débit de grains :

$$\begin{cases} Q(R) = \frac{2}{m} \int_0^R \rho v(x, R) \phi(x, R) dx \\ \phi(x, R) = \phi_{\infty}(1 - \alpha \exp(-R/R_0))(1 - (x/R)^2)^{\nu_{\phi}} \\ v(x, R) = \sqrt{2g\gamma R}(1 - (x/R)^2)^{\nu_v} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

On obtient alors :

$$Q = \beta/d^2 \sqrt{g} \phi_{\infty} (1 - \alpha \exp(-R/R_0)) R^{3/2}. \quad (\text{B.14})$$

où  $\beta$  est une fonction de  $\nu_v$ ,  $\nu_{\phi}$  et  $\gamma$  uniquement. La comparaison entre le débit mesuré directement dans les simulations et celui calculé par l'expression B.14 est donnée sur la figure B.17. On observe un très bon accord entre ces deux débits. Le fait que l'on observe un très bon accord entre le débit mesuré et le débit calculé par l'expression B.14 n'est pas surprenant. En effet, cela montre juste que l'on a correctement mesuré et modélisé les profils de vitesse et de compacité. Ensuite, pour obtenir le débit il suffit uniquement d'intégrer le produit de ces deux quantités. Le point le plus important est que cette expression, contrairement à la loi de Berverloo, ne fait pas intervenir le coefficient  $\kappa$ . Ce coefficient, introduit de manière *ad hoc* pour prendre en compte les effets de bord n'apparaît plus dans l'expression du débit. On voit par contre apparaître

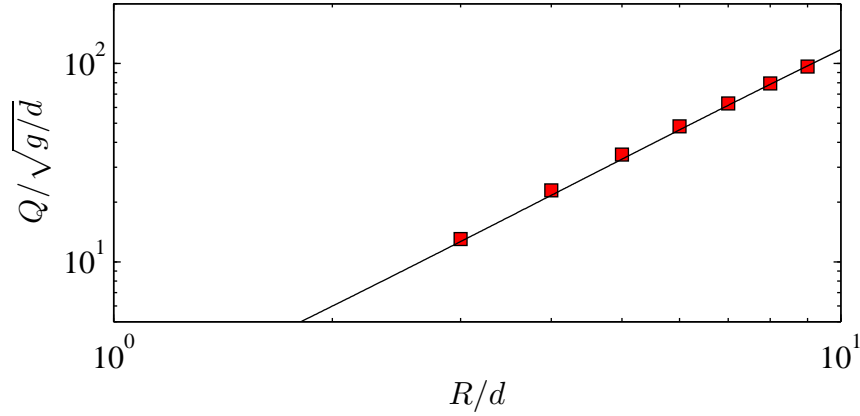


FIGURE B.17 – **Débit de grains en fonction de la taille de l'ouverture.** Les carrés rouges correspondent au débit mesuré directement dans les simulations. La ligne noire correspond au débit prédit par l'expression B.14.

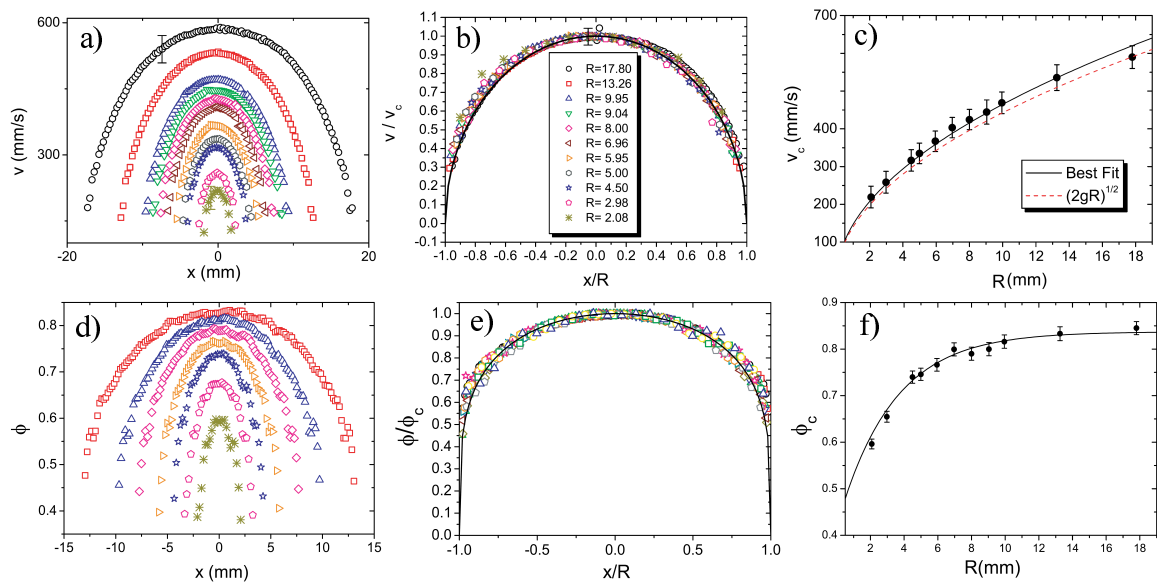
d'autres coefficient ( $\phi_\infty$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $R_0$ ), dont la signification physique est un peu plus claire puisqu'ils sont fournis par les profils de vitesse et de compacité.

### B.2.5 Conclusions

En conclusion, nos simulations numériques nous ont permis de reproduire fidèlement les caractéristiques observées lors de la décharge d'un silo. Lorsque celui-ci se vide, nous avons trouvé que le débit de grains est constant au cours du temps et donc qu'il ne dépend pas de la hauteur de l'empilement. De plus, nous avons montré, en accord avec Perge et al. [2012] que la pression sur le fond du silo variait au cours du temps. Ainsi, nous en sommes arrivés à la même conclusion : la pression sur le fond du silo ne fixe pas le débit de grains. Par ailleurs, une étude énergétique prédit que le débit de grains est fixé par la différence entre deux quantités dépendant de la hauteur : le travail du poids des grains et l'énergie dissipée dans la colonne. Le débit est donc fixé par la dissipation d'énergie dans le système dans une zone localisée autour de l'ouverture du silo et dont la taille ne dépend pas de la hauteur de l'empilement. Cette zone s'identifie alors à la zone de chute libre identifiée par Hagen [1839]. Des mesures locales de l'énergie dissipée au cours de la vidange nous ont ensuite permis de visualiser directement cette zone de chute libre. De plus, en cherchant la direction principale du tenseur des contraintes locales, nous avons pu mettre en évidence les voûtes formées par les chaînes de force près de l'ouverture. La mesure des profils de vitesse et de compacité à la sortie du silo ont permis de montrer que les grains sortant du silo étaient en chute libre à partir d'une altitude initiale ayant une forme quasi-parabolique. Nous avons alors estimé la taille de la zone de chute libre à  $2.25R$ , où  $R$  est le rayon de l'ouverture. Cette taille est compatible avec les observations qualitatives de l'énergie dissipée localement. Lorsque l'on intègre le produit des profils de vitesse et de compacité on obtient alors une expression du débit de grains qui diffère de la loi de Beverloo. Cette nouvelle expression du débit a l'avantage de ne pas faire apparaître de coefficient *ad hoc* ajouté pour prendre en compte les effets de bords et obtenir ainsi une

loi de puissance. Dans notre expression, les effets de bords sont directement contenus dans l'expression des deux profils.

Il reste toutefois plusieurs points à éclaircir. Tout d'abord, on peut se demander comment est fixée la taille de la zone de chute libre. Bien que nous ayons observé qu'elle dépendait linéairement du rayon de l'ouverture, cette zone est délimitée par la dissipation d'énergie. Ainsi, on pourrait faire varier la dissipation dans le système en changeant des paramètres tels que le frottement ou le coefficient de restitution. De même, les coefficients apparaissant dans la modélisation des profils peuvent être étudiés afin de dégager plus clairement leur origine physique. Pour finir, ces travaux réalisés en 2011 pendant ma thèse ont été effectués en parallèle et de manière expérimentale par Janda et al. [2012]. Pour comparaison, la figure B.18 montre les profils de vitesse et de compacité à la sortie du silo et mesurés expérimentalement. On peut constater que l'on retrouve exactement les mêmes comportements que ceux que nous venons de décrire. En modélisant les profils expérimentaux de vitesses et de compacités par les fonctions données dans les équations B.13, les auteurs obtiennent :  $\nu_v = 0.5$ ,  $\gamma = 1.07$ ,  $\nu_\phi = 0.22$ ,  $\phi_\infty = 0.83$ ,  $R_0 = 3.3$  et  $\alpha = 0.3$ . Bien que ces valeurs soit proches de celles que nous avons obtenues, nous pouvons faire quelques remarques sur les différences existantes. Tout d'abord, dans les expériences, le coefficient  $\nu_v$  n'est pas un paramètre libre mais a été fixé à 0.5. Au vu des données, on peut raisonnablement penser qu'un coefficient légèrement plus faible modélise mieux les profils de vitesse. Il ne serait pas étonnant d'obtenir un coefficient  $\nu_v$  proche de 0.38 étant donné le bon accord entre expériences et simulations concernant le coefficient  $\nu_\phi$ . Les légères différences existant entre les autres coefficients peuvent, quant à elles, s'interpréter par plusieurs facteurs. En effet, dans les simulations que nous réalisons, les grains sont des disques purement 2D et circulaires, de plus l'empilement que nous avons étudié est polydisperse ( $\pm 20\%$ ) alors que dans l'expérience de Janda et al. l'empilement est monodisperse. Pour finir, les grains que nous modélisons sont beaucoup plus mous que des grains réels. Tout ceci contribue au fait qu'il est rare d'obtenir un accord quantitatif entre nos simulations et les expériences qu'elles reproduisent.



S

FIGURE B.18 – a) Profils de vitesse à la sortie du silo mesurés expérimentalement par Janda et al. [2012]. Ceux-ci sont auto-similaires (sous-figure b). Ces deux courbes (a et b) sont à comparer avec celles de la figure B.12. c) Vitesse maximale de sortie en fonction de la taille de l'orifice, à comparer avec la figure B.13. d) Profil de compacité mesuré expérimentalement, ces profils sont également auto-similaires (sous-figure e) à comparer avec la figure B.15). Enfin, la sous-figure f) présentant la compacité maximale en fonction de la taille de l'ouverture est en bon accord qualitatif avec les données de la figure B.16



# Annexe C

## Fluage d'une colonne de grains sous l'effet de variation de température

### Sommaire

---

<b>C.1</b>	<b>État de l'art . . . . .</b>	<b>190</b>
<b>C.2</b>	<b>Simulations numériques du cyclage thermique . . . . .</b>	<b>196</b>
C.2.1	Méthode numérique . . . . .	196
C.2.2	Régimes de compaction . . . . .	198
C.2.3	Compaction non-homogène . . . . .	203
C.2.4	Dynamique des grains . . . . .	206
C.2.5	Conclusion . . . . .	214

---

## C.1 État de l'art

Un empilement lâche de grains tout juste construit est un système fragile, c'est-à-dire que si l'on déplace un grain, l'ensemble de l'empilement peut être affecté. Ceci est dû au fait qu'une telle colonne de grains est un système isostatique, c'est-à-dire que le nombre de degrés de liberté du système est égale au nombre de contraintes. Ainsi, si l'on ôte ou déplace un grain l'ensemble de l'empilement peut s'effondrer. Lorsque les grains sont rugueux, frottent les uns sur les autres et que l'empilement a déjà subi des réorganisations, il devient hyperstatique. Dans ce cas, c'est le sous-système constitué du réseau de chaînes de forces qui est isostatique et qu'il faut considérer. Une simple expérience permet d'illustrer ces concepts. Celle-ci est représentée sur la figure C.1. On crée un empilement vertical à deux dimensions de pièces de monnaies (C.1a). Comme illustré sur la figure C.1b), il est possible d'ôter bon nombre de pièces sans que l'empilement ne s'effondre (celles-ci sont représentées par des points verts). Cependant, si l'on ôté une pièce appartenant au réseau de chaîne de forces, l'empilement s'effondre (symbolisée par un point rouge sur la figure C.1b)). Un milieu granulaire est donc un milieu fragile et on comprend alors qu'une faible variation dans la position d'un grain appartenant au réseau de chaîne de forces puisse avoir des répercussions macroscopiques sur l'ensemble de la colonne de grains.

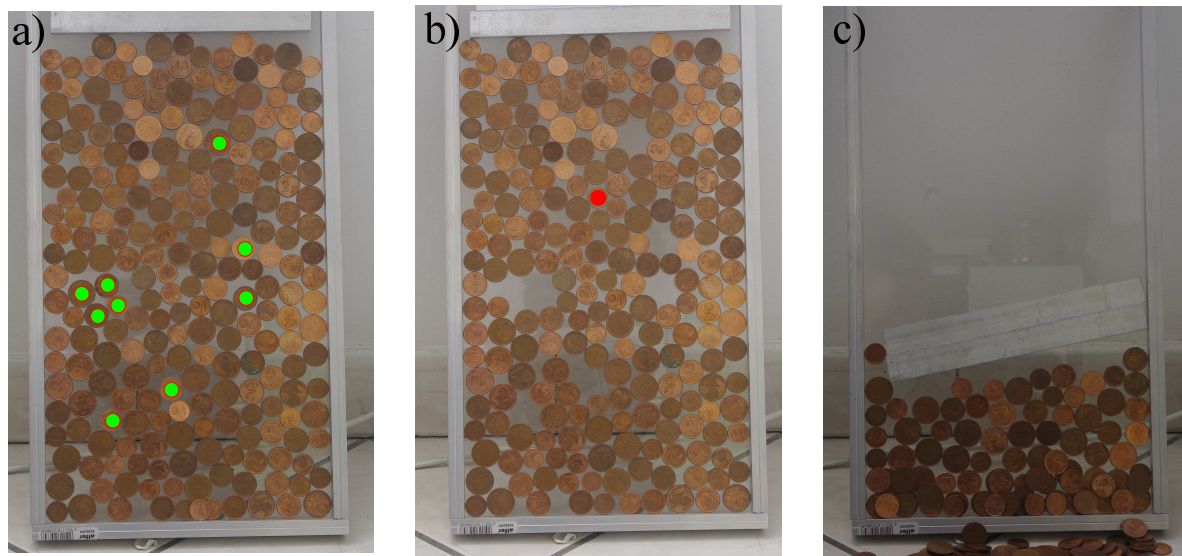


FIGURE C.1 – a) **Empilement vertical de pièces de monnaie à 2D.** Cet empilement est hyperstatique, on peut enlever les pièces marquées d'un point vert sans qu'il n'y ait de conséquence macroscopique sur l'empilement (b). Par contre si l'on déplace un grain appartenant au réseau de chaînes de force (point rouge) l'empilement s'effondre (c).

Différentes méthodes ont été utilisées ces dernières années afin de perturber la position des grains et donc de sonder la fragilité de l'empilement. Les deux exemples les plus fréquents sont l'utilisation de secousses régulières (Richard et al. [2005]; Ribière et al. [2007, 2005]) et l'application d'un cisaillement (Boyer et al. [2011]; Midi [2004]) à l'une des parois délimitant le milieu granulaire. Souvent, ces méthodes ont été présentées et étudiées séparément, l'enjeu actuel étant de mettre en lumière les caractéristiques

communes à ces deux modes de sollicitation. Leur point commun le plus évident est que l'injection d'énergie se fait via les parois contenant le milieu granulaire. Il existe cependant un autre moyen d'injecter de l'énergie en volume en imposant des variations de température à l'empilement. On peut donc se servir de ce mode de sollicitation afin d'étudier des écoulements quasi-statiques et étudier la rhéologie du matériau granulaire.

Lorsqu'un milieu granulaire est mis en écoulement, celui-ci peut avoir une dynamique complexe faisant intervenir du vieillissement, des hétérogénéités (tels que des bandes de cisaillement) ou encore des effets non locaux dus au confinement. Récemment, de grandes avancées dans la compréhension de tels écoulements ont été effectuées. Tout d'abord, les écoulements denses de particules immergées dans un fluide iso-densité et de grains secs ont été décrits avec succès en tant que phénomène dynamique critique, unifiant alors la rhéologie des suspensions à celle des milieux granulaires (Boyer et al. [2011]). Cependant, à cause d'effets non-locaux et collectifs, ces résultats ne sont plus valables dans la limite où le taux de cisaillement imposé aux grains tend vers zéro. De plus, pour de tels écoulements quasi-statiques, les régimes transitoires peuvent perdurer sur des temps comparables à ceux de l'expérience ce qui rend non pertinente l'utilisation de lois constitutives établies en régime stationnaire. Ainsi de tels écoulements ont encore besoin d'être étudiés dans le détail. Les cycles de température apparaissent alors comme une alternative aux traditionnelles expériences de cisaillement ou de secousses (*tapping*).

Bien qu'un milieu granulaire soit un système athermique, des variations de température peuvent avoir un effet important sur un empilement. En effet, une augmentation de température  $\Delta T$  dilate les grains d'une quantité  $\alpha \Delta T d$ , dans laquelle  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique des grains. Celui-ci vaut typiquement  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$  pour des billes de verre. Ainsi, une variation de température de  $1^\circ\text{C}$  provoque une dilatation typique de 10 nm pour des billes de verre de 1 mm de diamètre. Bien que ce déplacement soit très faible, notamment par rapport à la rugosité de surface des grains (couramment de l'ordre de la centaine de nanomètres Divoux et al. [2008]), l'effet cumulé sur l'ensemble d'un empilement dépasse largement la rugosité de surface des grains. La dilatation peut alors engendrer des contraintes au sein du matériau granulaire qui dépassent le critère de Coulomb provoquant alors des réorganisations.

Les premières observations en laboratoire de l'effet de la température sur un empilement granulaire datent des années 90 avec les travaux de Liu et Nagel [1992] et Liu [1994] sur la propagation du son dans un milieu granulaire. Les auteurs de cette étude émettent une onde acoustique au sein d'un échantillon et la détectent à quelques centimètres de la source. Ils observent alors qu'une variation de température de  $0.04^\circ\text{C}$  suffit à engendrer une modification de l'amplitude du signal d'un facteur 3 de façon réversible. Ces auteurs montrent de plus, que ce changement de comportement intervient lorsque les variations de température affectent le réseau de chaînes de forces.

Quelques années plus tard, Clément et al. [1997] ont trouvé un effet inattendu de la température en étudiant le poids apparent d'une colonne de grains. Initialement leur expérience consiste à mettre en évidence l'effet Janssen : 300 grammes de sable sont introduits dans un tube cylindrique de 1 cm de diamètre. Une balance mesure la masse apparente du sable, c'est-à-dire la force exercée par les grains sur le fond du récipient (voir figure C.2). Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, cette masse apparente est inférieure à la masse totale des grains du fait des chaînes de forces internes

qui redirigent le poids de la colonne sur les parois du tube. En laissant ce dispositif expérimental évoluer sous le seul effet des faibles variations de température malgré le contrôle en température, Clément et al. ont observé des variations très nettes de la masse apparente alors que la température ne varie que de quelques dixièmes de degrés. Ces variations sont illustrées sur la figure C.2b). On constate que la masse apparente varie fortement aux instants où la dérivée de la température change de signe. Ceci signifie que la température n'est pas directement la grandeur pertinente mais plutôt que les variations de température induisent localement des cisaillements susceptibles de réorganiser le milieu granulaire. Cependant, à l'issue de leurs travaux, il n'est pas encore clair qui de la dilatation des grains ou du tube qui les contient est responsable des variations de la masse apparente.

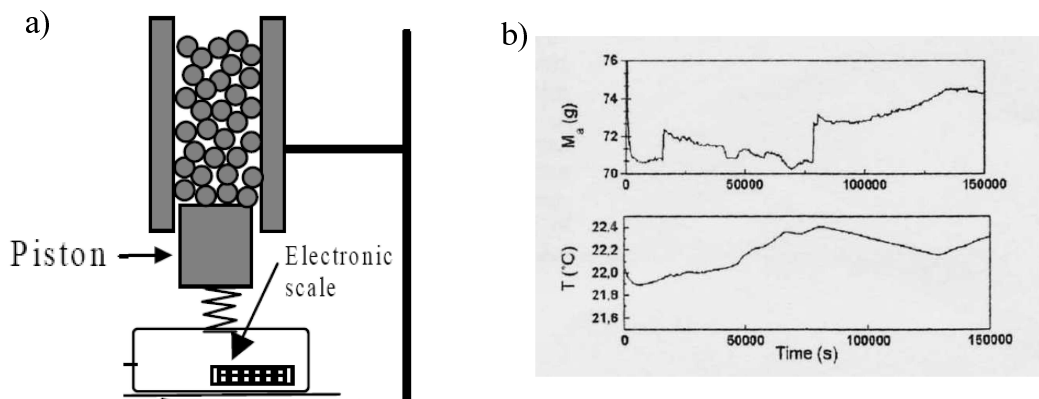


FIGURE C.2 – a) Dispositif expérimental utilisé par Clément et al. [1997] afin de sonder l'effet Janssen. Un cylindre d'un centimètre de diamètre est rempli de grains, la force agissant sur le fond du silo est mesurée par une balance électronique. b) Masse apparente des grains et température ambiante en fonction du temps. On remarque que les changements brutaux de masse interviennent lorsque la pente de la température change de signe.

À la même période Géminard et Gayvallet [2001] ont remarqué, en étudiant la conductivité thermique d'un milieu granulaire, qu'un empilement soumis à des variations périodiques de température voit sa compacité et sa conductivité thermique augmenter au cours du temps. Leur dispositif expérimental consiste en un tube de verre de 1.2 cm de diamètre et 2 m de long rempli de grains d'un diamètre de 100  $\mu m$ . Au centre du tube est présent un fil métallique tendu à ses deux extrémités. Un courant électrique sinusoïdal à la fréquence  $f$ , inférieure au Hertz, parcourt ce fil qui s'échauffe par effet Joule et dont la température varie à la fréquence  $2f$ . Par diffusion thermique les grains autour du fil voient également leur température varier. En jouant sur la fréquence d'excitation, on peut alors modifier l'épaisseur de peau sur laquelle les grains sont influencés. Il est alors possible de ne chauffer que les grains sans dilater leur contenant. Sous l'effet de la variation de température des seuls grains ils observent un lent fluage de la colonne (voir figure C.3). Au cours de ce fluage logarithmique, la hauteur des grains diminue d'environ un pourcent après 3000 cycles, soit 22 jours d'expérience. Cette expérience est la première à montrer que la dilatation des grains uniquement (sans le récipient) permet une réorganisation de l'empilement. Dans cette

expérience, la dilatation des grains est hétérogène. On peut alors se demander si la compaction est due aux variations de température ou aux gradients de température. On note également que dans leur expérience réalisée avec une amplitude de variation de température de  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ , la compaction se fait par sauts.

En 2009, Chen et al. [2009] réalisent une expérience similaire. Des grains de diamètre 0.5 mm sont contenus dans un tube de diamètre 25 mm. Ce tube est ensuite placé dans une enceinte chauffée à plusieurs dizaines de degrés au dessus de la température ambiante. En introduisant puis retirant le tube de l'enceinte, les auteurs créent des cycles de température. Ils observent alors qu'après chaque cycle la compacité de la colonne augmente. Le résultat de leur étude est représenté sur la figure C.3b). On remarque que la compaction est plus importante que dans les travaux de Géminard et Gayvallet [2001] et qu'elle se fait de façon continue. C'est-à-dire que la courbe représentant la compacité en fonction du nombre de cycles semble être continue. Il n'y a pas de saut de compacité séparé par des paliers. Il est important de noter qu'ici les variations de température sont de l'ordre de  $\Delta T = 40^\circ\text{C}$ .

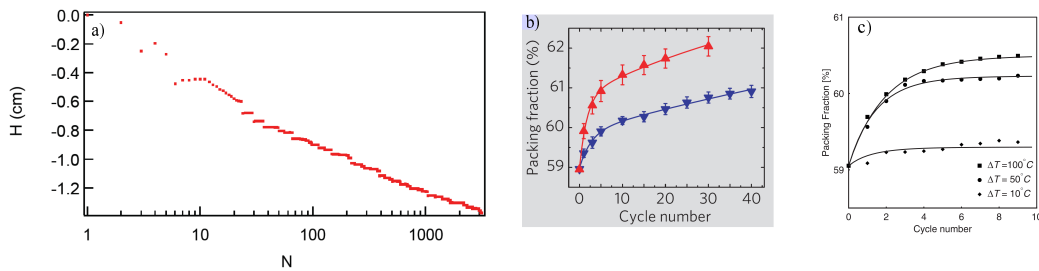


FIGURE C.3 – a) Hauteur d'une colonne de grains soumise à des cycles de température d'amplitude  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$  (d'après Géminard et Gayvallet [2001]). Le fluage de la colonne est intermittent et très lent. b) Compacité de l'empilement étudié par Chen et al. [2009] en fonction du nombre de cycles de température. Le fluage de la colonne est continu. c) Évolution de la compacité d'un empilement de sphères à 3D soumis dans des simulations numériques à des cycles de température (d'après Vargas et McCarthy [2007]). La compacité évolue rapidement et sature après une dizaine de cycles.

En 2009 Divoux et al. ont repris le système expérimental de Géminard et Gayvallet [2001] afin d'étudier l'effet de l'amplitude des cycles (Divoux et al. [2008]). Ils observent alors deux comportements bien distincts (figure C.4). À haute température ( $\Delta T > 3^\circ\text{C}$ ) le fluage de la colonne est continu et la hauteur de la colonne,  $h_n$  mesurée après  $n$  cycles peut être modélisée par une expression du type :

$$h_n = h_0 + h_e \exp(-n/n_e) + h_l \log n \quad (\text{C.1})$$

où  $h_0$  est l'altitude initiale de la colonne et  $n_e$  un nombre sans dimension caractérisant le régime transitoire au bout duquel la dynamique de la compaction devient logarithmique. À faible température ( $\Delta T < 3^\circ\text{C}$ ), la compaction se fait de manière différente. Tout d'abord, à nombre de cycles fixé, la hauteur de la colonne diminue moins qu'à haute température. De plus, la dynamique semble être linéaire et se fait par saut. Il semble qu'il y ait deux régimes bien distincts de compaction. Afin de mettre ceci en

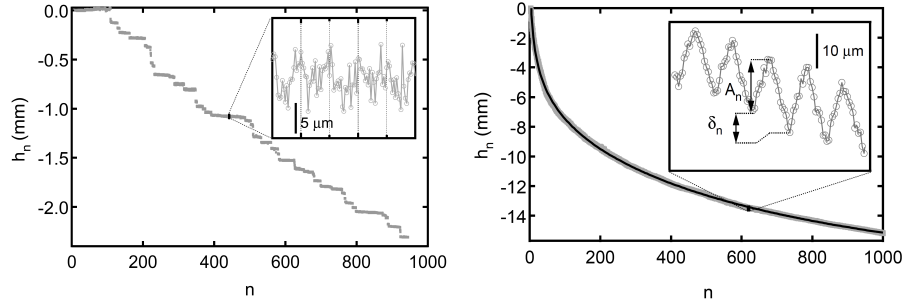


FIGURE C.4 – Évolution de la hauteur d'une colonne de grains pour deux amplitudes de température différentes (d'après Divoux et al. [2008]). Pour des faibles variations (à gauche), l'écoulement est intermittent comme l'ont également observé Géminard et Gayvallet [2001]. Pour des amplitudes de température supérieures à  $3^\circ\text{C}$ , le fluage des grains est continu à l'instar des expériences de Costantino et al. [2011b].

évidence, les auteurs ont tracé le coefficient  $n_e$  en fonction de la différence de température  $\Delta T$ . Ils observent alors que celui-ci diverge à l'approche d'une différence de température critique  $\Delta T_c \simeq 3^\circ\text{C}$  (figure C.5). Les auteurs interprètent alors cette limite  $\Delta T_c$ , comme la différence de température créant une dilatation de l'ordre de la rugosité de surface des grains. Cette interprétation n'a jusqu'à présent pas été vérifiée expérimentalement.

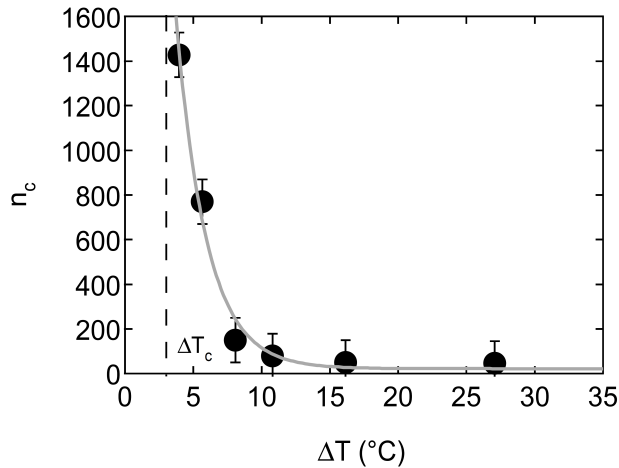


FIGURE C.5 – Temps caractéristique  $n_e$  en fonction de l'amplitude des cycles de température. Celui-ci n'est défini que pour  $\Delta T > \Delta T_c$  et diverge à l'approche de  $\Delta T_c$  (d'après Divoux et al. [2008]).

Nous pouvons également mentionner les travaux expérimentaux de Slotterback et al. [2008]. Leur dispositif consiste en une cuve remplie de grains, noyé dans un bain d'huile dont l'indice optique est le même que celui des grains. Ceci permet en éclairant l'ensemble avec une nappe laser d'obtenir par fluorescence la position individuelle de chaque grain. Ils observent alors une compaction rapide et exponentielle. Cependant, le fait que leur système soit totalement immergé rend difficile toute comparaison quantitative



avec les expériences citées précédemment. Qualitativement, le fait qu'il y ait un liquide entre les grains, rend la propagation du champ de température bien plus homogène par opposition à l'air. Ainsi, on peut comprendre que la compaction se fasse plus vite que dans le cas grains dans l'air. Par ailleurs, la présence de liquide lubrifie les contacts entre grains et donc favorise les avalanches et les réorganisations. Enfin, il est également important de noter que dans leurs expériences une masse repose sur le sommet de la colonne de grains. Ces trois observations peuvent donc justifier le fait que la colonne atteigne un état stationnaire en une cinquantaine de cycles.

Les seuls travaux numériques sur la compaction d'un empilement par variation de température dont nous avons connaissance sont ceux de Vargas et McCarthy [2007]. Ces simulations de dynamique moléculaire en trois dimensions modélisent le transport de la chaleur à travers les grains. Elles comptent 10000 grains contenus dans un récipient cylindrique de diamètre  $20 d$ , ainsi la hauteur de la colonne est de  $40 d$ . On verra par la suite que le rapport d'aspect de la colonne a une importance non négligeable dans l'amplitude du fluage de la colonne. L'écart de température est  $\Delta T = 50^\circ\text{C}$  et les auteurs observent une compaction très rapide : au bout de dix cycles la compacité a atteint une valeur stationnaire (voir figure C.3c)). Une compaction aussi rapide peut sans doute provenir du fait que ces simulations numériques ne prennent pas en compte la rugosité de surface des grains. Les auteurs ont essentiellement utilisé ces simulations numériques afin de modéliser la propagation de la chaleur dans un empilement granulaire. Ils n'ont que très peu étudié la compaction qui en résulte. Nous utilisons une approche différente. Dans nos simulations le transport de la chaleur n'est pas modélisé et l'influence de la température se fait via une perturbation, homogène dans l'empilement, du diamètre des grains.

Comme nous l'avons montré, des variations de température peuvent mettre en mouvement des grains. C'est d'ailleurs un mode de sollicitation doux qui a été utilisé par Djaoui et Crassous [2005] et Crassous et al. [2009] pour illustrer une méthode de diffusion de la lumière. De plus, nous pouvons mentionner le fait que des variations de température sont également responsables de mouvements irréversibles dans des matériaux autres qu'un milieu granulaire. En effet, Mazoyer et al. [2006] et Mazoyer et al. [2009] ont mis en évidence que les contractions et dilatations de vésicules de tensio-actif en phase oignon, induites par des variations de température, créaient des réarrangements irréversibles dans le matériau. De plus, dans leurs expériences, l'échantillon est quasi bidimensionnel et horizontal, ainsi la gravité n'est pas la cause de ces réarrangements. Nous pouvons alors espérer que les résultats obtenus dans notre étude puissent s'étendre au-delà des milieux granulaires.

Bien que l'effet de la température sur un empilement de grains a bien été compris à l'échelle macroscopique, il existe très peu de résultats à l'échelle d'un grain. On peut en effet se demander comment se comporte chaque grain lorsque la colonne se compacte. Est-ce que leurs mouvements sont collectifs ? Ou au contraire décorrélés ? Est-ce qu'il y a une différence de comportement des grains au-dessus et en dessous de  $\Delta T_c$  ? Comment est fixe  $\Delta T_c$  ? Ici aussi les simulations numériques peuvent apporter un nouveau regard sur ce phénomène. Un code reprenant l'algorithme utilisé pour étudier la vidange d'un silo a été modifié afin de simuler la dilatation des grains. Les détails de ces simulations et les résultats obtenus grâce à cet outil sont présentés dans les pages qui suivent.

## C.2 Simulations numériques du cyclage thermique

### C.2.1 Méthode numérique

#### Modélisation de la dilatation des grains

Les simulations numériques effectuées afin de modéliser l'effet des variations de température sur un empilement 2D de grains reposent sur un code similaire à celui utilisé pour modéliser la vidange d'un silo. Il s'agit de dynamique moléculaire de sphères molles où le frottement entre les grains est modélisé par la méthode des ressorts tangentiels de Cundall (Cundall et Strack [1979]). Les grains sont disposés dans une boîte rectangulaire dont les parois sont élastiques et possèdent le même coefficient d'élasticité que les grains. L'état initial est réalisé de manière identique à celui de la vidange du silo, la compacité initiale est comprise entre 0.8 et 0.81. Nous avons choisi de modéliser l'effet de la température de la manière la plus simple qui soit. En effet, nous n'avons pas cherché à modéliser le transport de chaleur à l'intérieur de la colonne. Dès lors, l'effet de la température se traduit par une simple dilatation ou contraction des grains. Concrètement, le rayon des grains devient une fonction du temps :

$$r_i(t) = r_i^0(1 + \alpha\Delta T \sin(\omega t)) \quad (\text{C.2})$$

Dans les simulations, nous avons fixé le coefficient de dilatation thermique des grains, noté  $\alpha$  à 1. Dans la suite, un cycle de température avec une amplitude  $\Delta T$  correspond à une dilatation d'une quantité  $\alpha\Delta T d$ . La dilatation des grains peut se faire de manière homogène ou hétérogène dans l'empilement. Il suffit pour cela d'adapter l'équation C.2 en choisissant un coefficient de dilatation thermique différent pour chaque grain. Sauf mention contraire, dans la suite nous avons toujours opté pour une dilatation homogène des grains. Bien que ceci ne soit pas exactement ce que l'on observe expérimentalement, une dilatation homogène permet de simplifier le problème. Cela permet également de considérer les cycles de température sous un angle différent : celui d'un empilement soumis à une simple perturbation géométrique et homogène. De plus, sauf mention contraire, les parois du réservoir contenant les grains ne sont pas dilatées. Leur position est fixe.

#### Premiers essais

Avant de réaliser une simulation numérique, il convient de donner aux paramètres  $\omega$  et  $\Delta T$  des valeurs pertinentes. Expérimentalement, l'amplitude des cycles de température est typiquement de l'ordre de  $10^\circ\text{C}$  et le coefficient de dilatation thermique de grains de sable est de l'ordre  $10^{-6}$ , si bien que l'on peut s'attendre, pour des billes d'un millimètre de diamètre à une dilatation de l'ordre de 1% de leur diamètre. Pour ce premier essais nous avons fixé le paramètre  $\Delta T$  à  $10^{-2}$ . La durée d'un cycle doit être choisie avec précaution. En effet, il faut que cette durée soit grande devant les autres temps caractéristiques du système. Elle doit notamment être grande devant  $\sqrt{d/g}$ , mais également devant la période d'oscillation de l'empilement. En effet, comme les grains que l'on simule sont beaucoup plus mous ( $k = 10^5 \text{ mg/d}$ ) que des grains en matériaux usuels, l'empilement possède une élasticité globale dont l'effet n'est pas négligeable. Ainsi, lorsque l'on crée l'empilement, les grains initialement placés sur une grille carrée



tombent sous l'effet de la gravité. On peut alors clairement observer le sommet de la colonne décrire des oscillations amorties. La période de ces oscillations vaut environ  $2\sqrt{d/g}$ . Nous avons alors choisi une période de  $\frac{2\pi}{\omega} = 10\sqrt{d/g}$ . Celle-ci correspond alors à 100000 pas de temps ( $dt = 10^{-4}\sqrt{g/d}$ ). Nous avons réalisé une simulation avec une cuve d'une largeur de  $40d$  et contenant 7500 grains. Cette simulation a tourné pendant environ deux semaines sur un ordinateur de bureau, ce qui correspond à 1000 cycles de température. À l'issue de chaque cycle la position de chaque grain est sauvegardée, si bien que nous avons une vision stroboscopique de la dynamique de l'empilement. La figure C.6 présente alors l'altitude  $h$  de la colonne en fonction du nombre de cycles  $n$ .

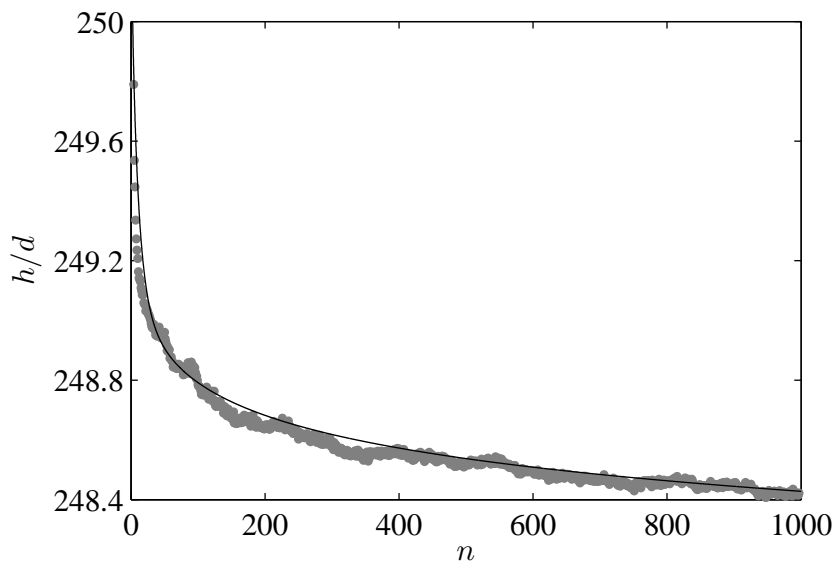


FIGURE C.6 – **Évolution de la hauteur de l'empilement de grains simulé.** On remarque un lent fluage continu de la colonne qui peut être modélisé par l'équation C.1 avec les paramètres  $n_e = 10, h_e = 0.5, h_0 = 249.7 d, h_l = 0.2$ .

On note très clairement que l'on retrouve le comportement attendu, à savoir que la colonne se compacte. Contrairement aux simulations de Vargas et McCarthy [2007], la dynamique de la compaction obtenue dans nos simulations est lente. En effet, après mille pas de temps, la hauteur de la colonne n'a toujours pas atteint de valeur stationnaire. On retrouve le même comportement que celui obtenu lors de la compaction d'un empilement par secousses lorsque le rapport d'aspect de la colonne empêche la formation de rouleaux de convection Knight et al. [1995]. Dans une telle expérience la compacité évolue en  $1/\log(n)$ . On peut d'ailleurs retrouver cette dynamique de fluage dans nos simulations. En effet, la hauteur de la colonne peut être modélisée par l'expression donnée dans l'équation C.1. Cette expression prédit que le comportement de la hauteur est initialement exponentiel pendant un nombre  $n_e$  de cycle, puis après ce transitoire la hauteur évolue de façon logarithmique. Nous obtenons un ajustement des données correct avec un coefficient  $n_e = 10$  qui est comparable aux coefficients trouvés expérimentalement (voir la figure C.5).

## Retour sur la méthode numérique

Nous voyons, ainsi, qu'une simple variation sinusoïdale de la taille des grains, faite de façon homogène sur l'empilement, permet de reproduire, de manière fidèle, la dynamique globale d'une colonne de grains soumise à des cycles de température. Nous avons également testé une dilatation non-homogène des grains. Les grains situés au centre ont été dilatés de  $\alpha\Delta T d$  et les grains à l'extérieur ne l'ont pas été. Nous avons aussi, dans d'autres simulations, translaté légèrement, de manière homothétique à la colonne, les parois du silo pendant un cycle de température. Dans ces deux cas nous n'avons pas observé de différence flagrante de comportement des grains. Nous avons donc utilisé une dilatation homogène des grains pour étudier l'effet de la température sur un empilement. L'objectif est alors d'étudier les effets de paramètres difficilement pilotables expérimentalement comme par exemple la raideur ou la rugosité des grains. On cherche également à retrouver les deux régimes de compaction observés par Divoux et al. [2008]. Un second objectif est de décrire le comportement individuel des grains dans l'ensemble de la colonne. Ceci n'a, à notre connaissance, jamais été réalisé dans le cas d'une colonne de grains sec, l'étude de Slotterback et al. [2008] en milieu immergé semble indiquer la présence de mouvements collectifs appelés *string like motion*.

### C.2.2 Régimes de compaction

Afin de retrouver les deux régimes de compaction observés expérimentalement, nous avons voulu répéter la simulation précédente pour différentes amplitudes de cycle  $\Delta T$ . Cependant, avant de commencer une étude systématique sur l'influence de l'amplitude des cycles, nous avons quantifié l'influence de la fréquence de la sollicitation.

#### Étude fréquentielle

Nous avons donc simulé des cycles de températures à différentes fréquences de forçage sans toutefois prendre en compte les effets dus à la diffusion de la chaleur (effet de peau, déphasage etc.). En effet, la dilatation des grains reste homogène dans la colonne. Celle-ci possède, comme précédemment, une largeur  $L = 40d$  contient 7500 grains et dont l'amplitude de dilatation est  $\Delta T = 10^{-3}$ . La pulsation de forçage a été variée de  $0.3\sqrt{g/d}$  à  $3.1\sqrt{g/d}$ . Dans toutes ces situations une compaction lente est observée. Afin de les comparer, on mesure le tassement  $\Delta h$  de la colonne, défini comme sa différence de hauteur entre le premier et le  $n^{\text{ième}}$  cycle de température. La figure C.7 présente alors  $\Delta h$  en fonction de la pulsation  $\omega$  à l'issue du cycle  $n = 400$ .

On constate alors que le fluage de la colonne dépend de la fréquence de la sollicitation qu'on lui impose. Cette réponse présente un maximum pour une pulsation  $\omega = 2.3\sqrt{g/d}$ . Cette pulsation correspond à la pulsation d'oscillation de la colonne. Comme prévu, on observe que si l'on impose une période d'excitation trop courte, on sonde l'élasticité des grains. Ainsi, dans toutes les simulations décrites plus loin, nous imposerons une pulsation d'oscillation  $\omega = 0.8\sqrt{g/d}$ , soit une période de  $7.5\sqrt{d/g}$ . Autour de cette pulsation la réponse de la colonne est plate, on peut donc supposer que l'évolution de l'empilement se fait de manière quasi-statique.

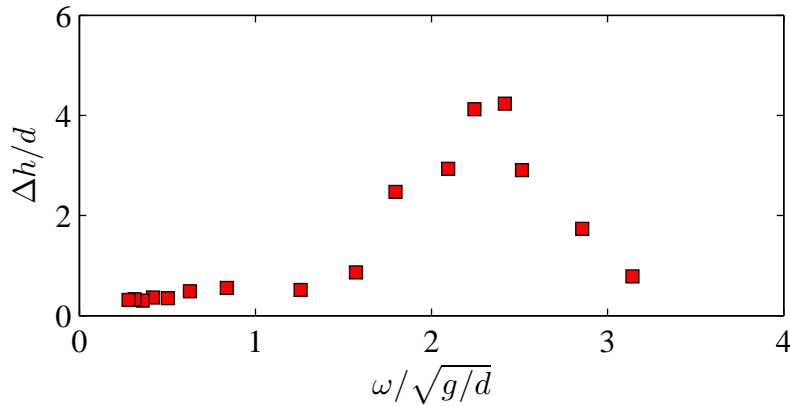


FIGURE C.7 – **Différence de hauteur de la colonne en fonction de la pulsation de forçage** entre l'état initial et l'état après 1000 cycles de température. On observe une résonance autour de  $\omega = 2.3\sqrt{g/d}$  qui est proche de la pulsation d'oscillation de la colonne. Pour des pulsations en dessous de  $1.5\sqrt{g/d}$ , la réponse est plate, on travaillera alors par la suite à des pulsations inférieures à  $1.5\sqrt{g/d}$ .

### Amplitude des cycles

Une fois la période des cycles de température fixée, nous avons effectué des simulations avec des amplitudes variant de  $\Delta T = 10^{-6}$  à  $\Delta T = 0.1$ . Chacune des simulations effectue 1000 cycles de température et on mesure comme précédemment le tassement de la colonne à la fin des 1000 cycles. Sur la figure C.8 présentant  $\Delta h$  en fonction de  $\Delta T$  on distingue clairement trois régimes.

Tout d'abord, pour de faibles amplitudes de température, la hauteur de la colonne présente un plateau et donc ne dépend pas de l'amplitude de la sollicitation. En effet, on imagine bien que de très faibles variations du rayon des grains ne fassent que sonder l'élasticité du milieu (élasticité des grains et des ressorts tangentiels). On s'attend à ce que l'évolution soit réversible, toutefois un lent fluage de l'empilement est observé. On peut alors se demander d'où provient cette compaction et où sont localisés les réarrangements de grains. La figure C.8b) montre un exemple de l'altitude la colonne en fonction du nombre de cycles. Dans ce premier régime la compaction se fait par sauts comme l'ont observé Divoux et al. [2008]; Géminard et Gayvallet [2001].

En augmentant l'amplitude des cycles, on voit apparaître un deuxième régime dans lequel le tassement de la colonne augmente avec l'amplitude. Un exemple de la dynamique de fluage dans ce régime a été représenté sur la figure C.6 et dont le fluage est continu. On retrouve alors les deux comportements décrits par Divoux et al. [2008]. On appelle alors  $\Delta T_c$  l'amplitude critique séparant les deux régimes de compaction. L'enjeu est alors de comprendre quel sont les paramètres physiques qui fixent la valeur de  $\Delta T_c$ .

En augmentant encore la température, on trouve un troisième régime dans lequel la compaction est une fonction décroissante de l'amplitude. Dans ce troisième régime la dilatation des grains apporte tellement d'énergie au système que celui-ci n'évolue plus de manière quasi-statique. On observe d'ailleurs des rouleaux de convection. Ceux-ci

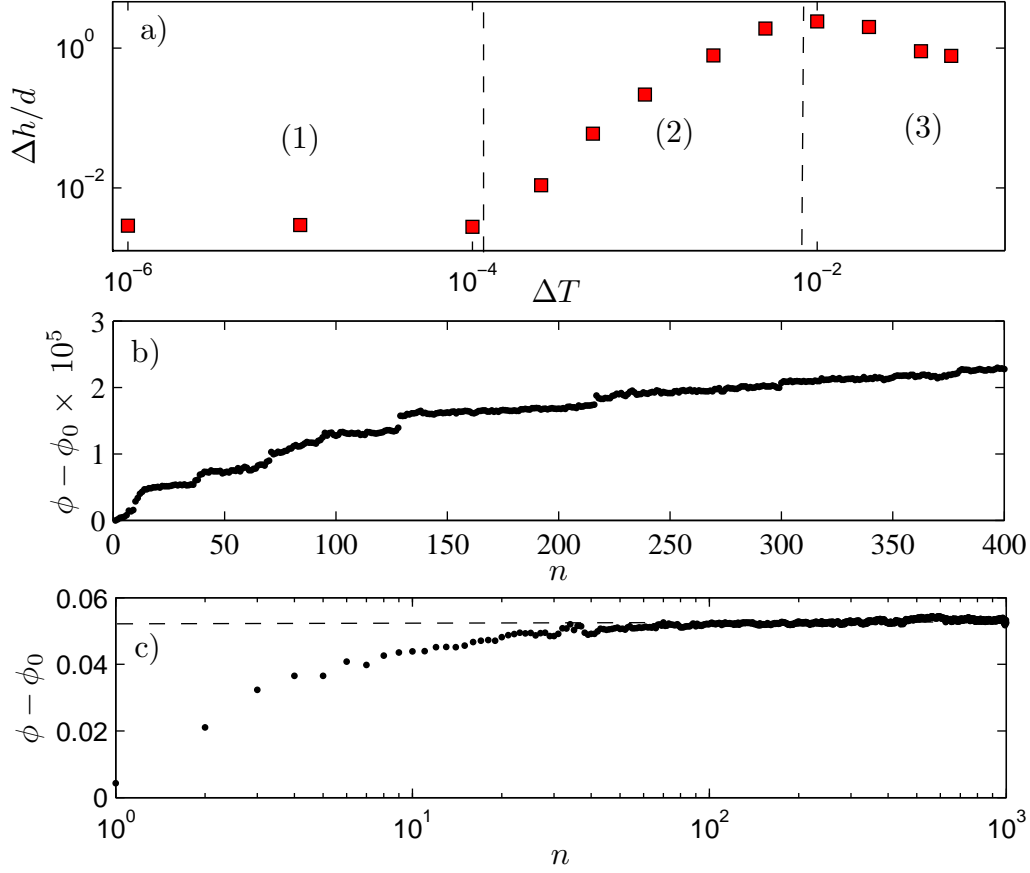


FIGURE C.8 – a) Tassement  $\Delta h$  de l'empilement de grains mesuré après 1000 cycles en fonction de l'amplitude  $\Delta T$  des cycles. On distingue clairement trois régimes. Le premier régime, à basse température est illustré sur la sous-figure b) représentant l'évolution de la compacité de l'empilement au cours des cycles. Son évolution se fait de manière intermittente. Le régime 2, correspond à un fluage continu comme celui nous avons représenté sur la figure C.6. Dans le régime 3, à très haute amplitude de température, l'énergie injectée n'est pas suffisamment dissipée pour que la colonne ait un écoulement quasi-statique. L'évolution de la compacité (c) montre que l'on atteint un état stationnaire.

sont représentés sur la figure C.9 issue d'une simulation différente, dont le rapport d'aspect a été modifié afin d'obtenir une meilleure illustration. De plus, dans ce régime, la compacité atteint une valeur stationnaire (voir figure C.8c)). Ainsi, le troisième régime s'apparente à la dynamique observée lorsque des secousses de fortes amplitudes sont imposées à un empilement et que des rouleaux de convection apparaissent (Richard et al. [2005]). Il pourra alors être intéressant de comparer les résultats obtenus via ces deux méthodes. Notamment, lorsque l'on soumet un empilement à des secousses mécaniques, il existe une relation univoque entre les fluctuations de densité et la densité moyenne (Ribière et al. [2007]). Ainsi, s'il est possible de faire un parallèle entre les expériences de cyclage thermique (i.e. de dilatation des grains) et les expériences de secousses, cela signifie que l'on pourra utiliser le cyclage thermique afin d'extrapoler ce qui se passe

dans la limite des faibles accélérations dans le cas des secousses mécaniques.

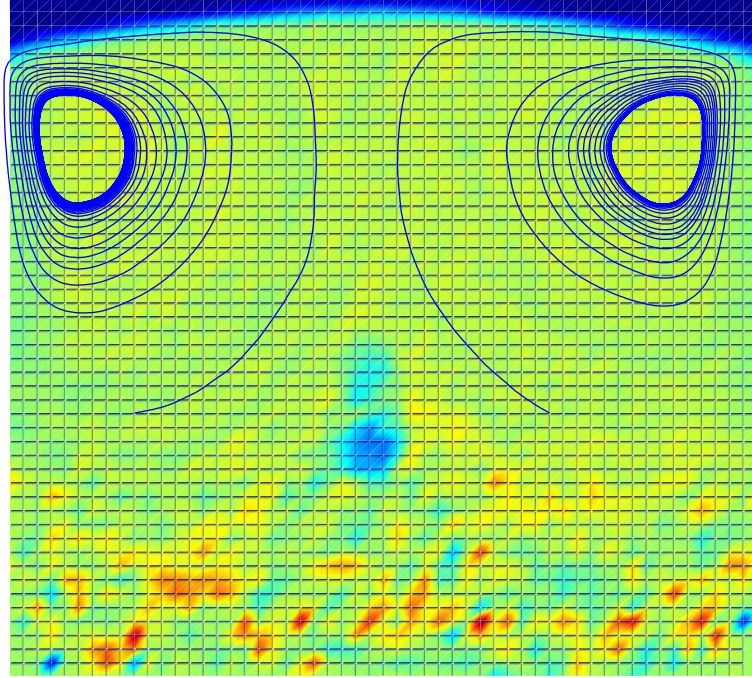


FIGURE C.9 – **Rouleaux de convection dans l’empilement à haute amplitude de température** ( $\Delta T = 0.1$ ). Les lignes continues représentent les lignes de courant des grains au sein du silo. Afin de mieux les visualiser, le rapport d’aspect de l’empilement a été modifié. Il s’agit d’un silo de 60 diamètres de large contenant 4000 grains.

Par la suite, nous nous intéresserons uniquement aux régimes 1 et 2 qui sont ceux auxquels on peut accéder expérimentalement et qui sont effectivement observés. Le régime 3 a été peu étudié et méritera par la suite une attention plus approfondie afin de déterminer ses points communs avec la compaction par secousses mécaniques. À plusieurs reprises (Divoux et al. [2008]; Chen et al. [2009]) il a été proposé que la compaction dépend fortement de la rugosité de surface des grains. Ainsi, nous nous sommes proposés d’étudier plus en détail la transition entre les régimes 1 et 2 en faisant varier les propriétés physiques de l’interaction entre les grains. Concrètement, nous avons fait varier le coefficient de frottement  $\mu$ , la raideur du ressort tangentiel  $k_t$  et l’élasticité des grains  $k$ .

### Température de transition entre les deux régimes

Nous avons effectué des simulations en gardant les paramètres suivants constants :  $L = 40d$ , 7500 grains et  $\omega = 10^{-4}\sqrt{gd}$  en faisant varier les coefficient  $\mu$ ,  $k_t$  et  $k$ . Différentes amplitudes de cycles ont été imposées pour chaque valeur des coefficients, ceci afin de mettre en évidence la dépendance de  $\Delta T_c$  vis-à-vis des paramètres microscop-

piques de la simulation. Pour chacune des simulations nous avons mesuré le tassement de la colonne  $\Delta h$  après 1000 cycles et avons alors calculé la différence de compacité  $\Delta\phi = \phi - \phi_0$ , où  $\phi_0$  est la compacité initiale. La figure C.10a) présente l'ensemble des résultats obtenus. Pour chacune des courbes obtenues on constate que les deux régimes sont toujours représentés.

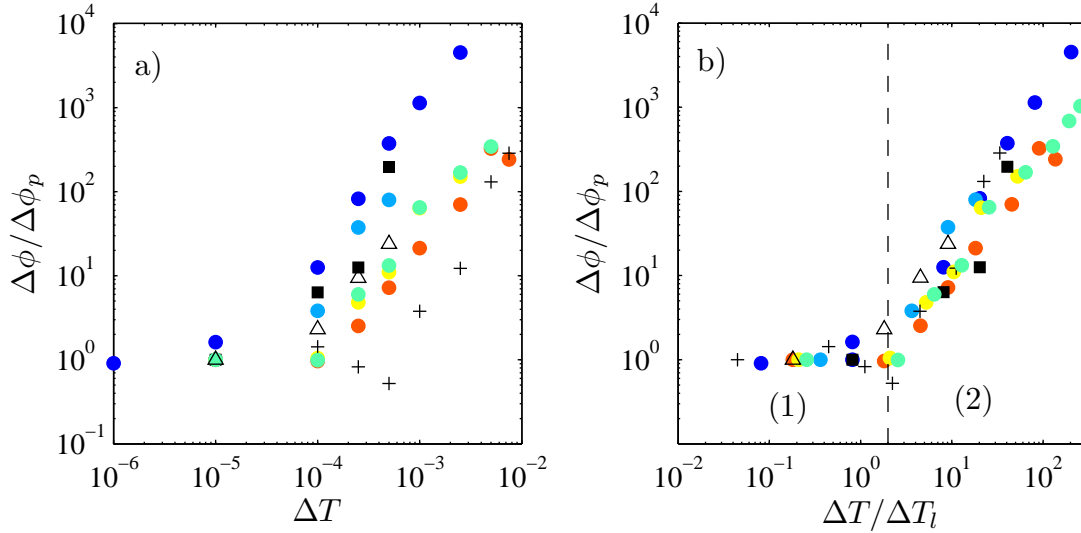


FIGURE C.10 – a) Évolution de la compacité  $\phi - \phi_0$  en fonction de  $\Delta T$  pour différents paramètres microscopique ( $\square$  :  $k = 10^5$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $k_t = 33000$ ;  $+$  :  $k = 10^5$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $k_t = 100$ ;  $\triangle$  :  $k = 10^4$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $k_t = 33000$ ;  $\cdot$  :  $k = 10^5$ ,  $k_t = 3300$ , de bleu à rouge :  $\mu = 0.05, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ ). On remarque que chaque courbe présente deux régimes de compaction et la température critique  $\Delta T_c$  dépend des paramètres microscopiques  $k$ ,  $k_t$  et  $\mu$ . En traçant,  $\Delta\phi/\Delta\phi_p$  en fonction de  $\Delta T/\Delta T_l$ , toutes les courbes s'ajustent sur une courbe maîtresse (sous figure b)), montrant que  $\Delta T_l$  est bien le paramètre pertinent de cette étude.

On constate alors que la valeur de  $\Delta T_c$  dépend effectivement des paramètres microscopiques des forces de contact entre les grains. Nous pouvons donc chercher dans les forces de contact des limites de comportement pouvant expliquer l'existence de deux régimes. De façon grossière, la force de contact entre les grains se résume à deux composantes : une composante normale donnée par la répulsion élastique entre les grains et une composante tangentielle modélisée par les ressorts tangentiels. Lors de la dilatation d'un grain, on peut donc s'attendre à ce que ces deux forces soient respectivement de l'ordre de  $k\alpha\Delta T$  et  $k_t\alpha\Delta T$ . On peut alors dégager deux comportements limites. En effet, selon l'axe normal on s'attend à ce que le comportement soit réversible tant que  $k\alpha\Delta T < mg$ , c'est-à-dire tant que la force normale est inférieure à la force nécessaire pour soulever un grain. De la même manière, selon l'axe tangential, le mouvement sera réversible tant qu'il n'y a pas de glissement entre les grains, c'est-à-dire tant que  $k_t\alpha\Delta T < \mu mg$ . On peut alors définir deux nombres sans dimension délimitant deux régimes de comportement,  $\frac{k\alpha\Delta T}{mg}$  et  $\frac{k_t\alpha\Delta T}{\mu mg}$ . Pour obtenir un mouvement irréversible il faut que ces deux nombres soient plus grands que 1, donc il faut *a priori* que leur produit le soit également (cette condition est nécessaire mais pas suffisante), ainsi on peut définir une température limite notée  $\Delta T_l$  et valant :



$$\Delta T_l = mg \sqrt{\frac{\mu}{\alpha^2 k_t k}} \quad (\text{C.3})$$

Il se trouve qu'en traçant la compaction  $\Delta\phi$  de l'empilement normalisée par la compaction plateau  $\Delta\phi_p$  obtenue dans le régime 1 en fonction de la température réduite :  $\Delta T/\Delta T_l$ , toutes les courbes de la figure C.10 se regroupent sur une seule et même courbe maîtresse. La compaction  $\Delta\phi_p$  dépend *a priori* de la taille du système et de l'état initial. Ces dépendances n'ont pas été étudiées dans le détail au cours de cette thèse et méritera par la suite une attention particulière. La transition entre ces deux régimes intervient pour  $\Delta T/\Delta T_l = 1.5$ . Ainsi, la température limite  $\Delta T_l$  que nous avons définie à partir d'arguments simples semble s'apparenter à  $\Delta T_c$ . En effet, on retrouve une compaction lente, par saut pour  $\Delta T \ll \Delta T_l$  et une compaction continue pour  $\Delta T \gg \Delta T_l$ . On peut interpréter physiquement  $\Delta T_l$  comme étant la température au-delà de laquelle les effets moyens de la dilatation sur les forces normales et tangentielles ne sont pas réversibles. Cette température est donc liée à la rugosité de surface des grains, qui est simulée grâce aux ressorts tangentiels de Cundall. En effet, bien que nos simulations considèrent des grains parfaitement lisses, les ressorts tangentiels introduisent une rugosité effective de l'ordre de  $mg/k_t$ . Toutefois, nous trouvons également que la température séparant les deux régimes dépend aussi du module d'Young du matériau. Bien que cette interprétation simpliste décrive l'existence d'une transition, elle prédit une évolution réversible du système et donc aucune compaction en dessous de  $\Delta T_l$ . En fait, les grains dans l'empilement sont déjà sous contraintes et une dilatation plus faible que  $\alpha\Delta T_l$  peut suffire à dépasser le critère de Mohr-Coulomb et créer ainsi des réarrangements.

## Conclusion

Nos simulations reproduisent donc fidèlement les deux régimes de compaction observés lors des cycles de température. Nous avons également proposé une expression analytique de la température critique délimitant ces deux régimes. Bien que cette température dépende de la rugosité des grains, elle dépend également de leur élasticité. Ainsi, un couplage entre force normale et force tangentielle est responsable du changement de régime. Ainsi, raideur et rugosité ne sont pas indépendantes dans le processus de compaction et il est possible de compenser la diminution de l'une en modifiant l'autre.

Dans le but de donner une interprétation mésoscopique à ces deux régimes, nous nous focalisons dans la suite sur la dynamique de compaction à l'échelle des grains, pour des amplitudes supérieures et inférieures à  $\Delta T_c$ .

### C.2.3 Compaction non-homogène

#### Première approche

Dans l'objectif d'étudier la compaction par cycles de température de la manière la plus complète possible, nous avons fait varier le nombre de grains dans le silo tout en gardant sa largeur constante (ici  $L = 25 d$ ). Les autres paramètres de la simulation

sont eux aussi gardés constants et valent :  $\Delta T = 0.001$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $k = 10^5 \bar{m}g/d$ ,  $k_t = 3300 \bar{m}g/d$  si bien que la colonne se compacte continuellement (régime 2). Le nombre de grains varie entre 2000 et 7500 grains, la hauteur de l'empilement est donc comprise entre  $80 d$  et  $300 d$ . Bien que l'on n'ait pas étudié une grande gamme de remplissage, on aperçoit très clairement sur la figure C.11 que plus la colonne contient de grains et moins celle-ci se compacte. Ceci peut donc impliquer deux conséquences différentes : soit la compaction est homogène et est une fonction décroissante de la hauteur de l'empilement, soit la compaction est hétérogène et s'opère préférentiellement dans une zone dont la taille est constante.

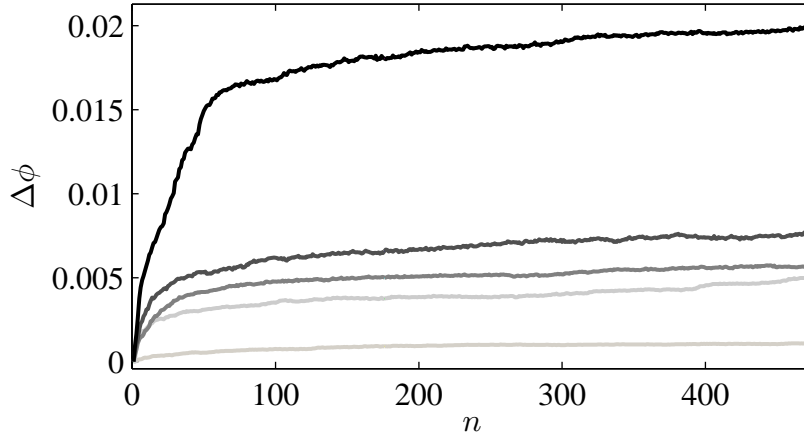


FIGURE C.11 – Évolution de  $\Delta\phi$  en fonction du nombre de cycles pour différents remplissages de la colonne. On constate que plus la hauteur de grains est importante moins la colonne se compacte (du noir au gris clair  $N = 2000, 3000, 4000, 5000, 7500$ ).

Afin de tester ces deux hypothèses, nous avons calculé le déplacement de chaque grain entre deux cycles successifs. Ce déplacement est ensuite moyenné dans le temps. Ainsi, pour chaque grain de l'empilement on calcule la quantité  $\delta r$  définie par :

$$\delta r = \frac{1}{1000} \sum_{n=1}^{1000} \sqrt{(x(nT) - x((n-1)T))^2 + (y(nT) - y((n-1)T))^2} \quad (C.4)$$

où  $T$  est la période des cycles de température. Nous avons alors repris les simulations qui nous ont permis de définir le seuil de température  $\Delta T$ , et nous avons tracé le déplacement moyen des grains en fonction de leur hauteur dans la colonne pour différentes amplitudes de cycle sur la figure C.12a).

On remarque sur cette figure que le déplacement moyen n'est pas linéaire, il augmente fortement à mesure que les grains sont proches de la surface libre. On peut alors définir une hauteur caractéristique  $h_c^{(\Delta T)}$  pour laquelle le déplacement en fonction de l'altitude dans la colonne subit une rupture de pente. Cette hauteur caractéristique ne semble pas dépendre de  $\Delta T$ . Afin d'interpréter ceci, nous avons également tracé le profil de pression,  $\sigma$ , au sein de l'empilement (figure C.12b)). Ces profils de pression, mesurés en fonction de la hauteur dans la colonne, ont la même allure que le déplacement des grains et présentent eux aussi une rupture de pente à une hauteur notée  $h_c^{(\Delta\sigma)}$ . Nous



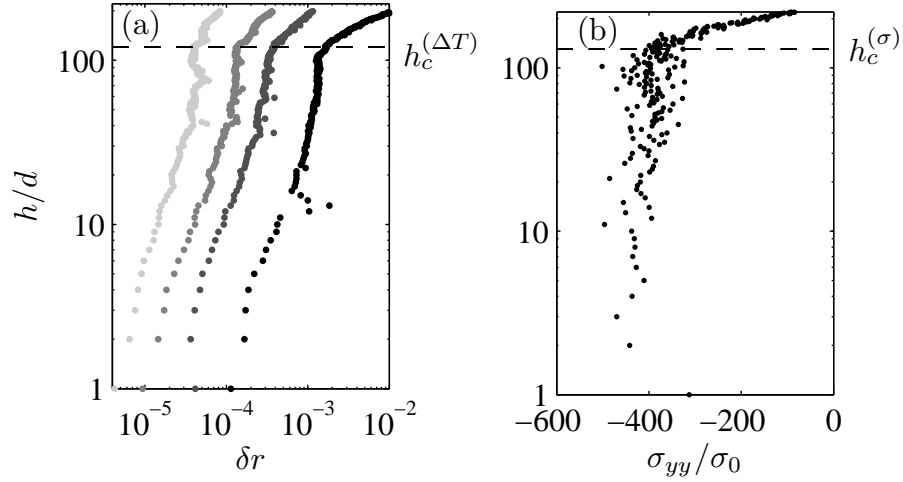


FIGURE C.12 – a) **Profils du déplacement moyen de chaque grain entre deux pas de temps successifs pour différents  $\Delta T$**  (du clair au foncé :  $\Delta T = 2.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\Delta T = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\Delta T = 10^{-3}$  et  $\Delta T = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ). Ceux-ci montrent que la compaction n'est pas homogène et fait apparaître une hauteur caractéristique  $h_c^{(\Delta T)}$  qui ne dépend pas de l'amplitude de température  $\Delta T$ . b) **Profil de pression dans la colonne** ( $\Delta T = 5 \cdot 10^{-3}$ ). Ce profil fait également apparaître une hauteur caractéristique notée  $h_c^{(\sigma)}$ .

avons alors mesuré ces deux hauteurs caractéristiques dans différentes simulations. La figure C.13a) présente alors  $h_c^{\Delta T}$  en fonction de  $h_c^{(\sigma)}$ . On obtient une relation linéaire entre les deux hauteurs caractéristiques avec une pente de 1. Ceci indique donc que  $h_c^{(\Delta T)} = h_c^{(\sigma)} = h_c$ . Ainsi, la compaction est bien hétérogène et cette hétérogénéité est fixée par le champ de pression au sein de l'empilement.

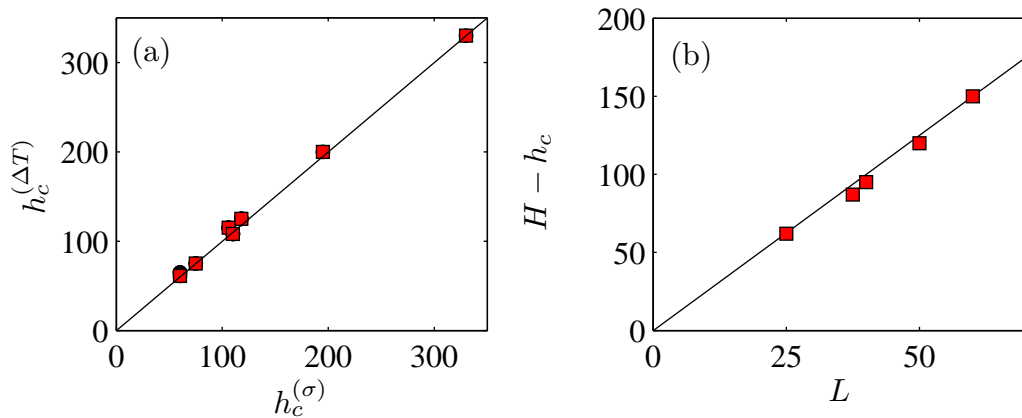


FIGURE C.13 – (a) **Comparaison entre les deux hauteurs caractéristiques  $h_c^{(\Delta T)}$  et  $h_c^{(\sigma)}$** . On obtient une droite de pente 1. (b)  $h_c$  en fonction de la largeur  $L$  de la colonne. On observe une relation linéaire, de pente 2.3, compatible avec la longueur caractéristique introduite par l'effet Janssen.

Dans une telle colonne de grains on s'attend à retrouver l'effet Janssen. La pression

tend donc exponentiellement vers une constante à mesure que l'on s'enfonce dans le silo. La longueur caractéristique de l'écrantage est proportionnelle à la largeur de la colonne. Afin de vérifier que l'on retrouve bien cette proportionnalité, nous avons réalisé des simulations avec différentes largeurs de colonne et mesuré pour chacune d'elles la hauteur caractéristique  $h_c$ . On constate alors, sur la figure C.13b), où l'on a tracé  $H - h_c$  ( $H$  étant la hauteur totale de la colonne) en fonction de la largeur  $L$  que l'on obtient une relation linéaire. Ainsi, nous pouvons conclure que la compaction se fait majoritairement dans le haut de la colonne sur une hauteur proportionnelle à la largeur de la colonne. Ainsi, la dynamique globale de compaction est contrainte par la taille finie du silo.

### C.2.4 Dynamique des grains

Les simulations numériques que nous venons de présenter reproduisent fidèlement les observations expérimentales à l'échelle macroscopique. Il paraît donc légitime de les utiliser afin d'étudier les mouvements individuels de chaque grain. Cette étude de la dynamique locale des grains s'est naturellement divisée en deux parties. Dans la première partie nous étudions le comportement de la colonne au-dessus de  $\Delta T_c$  et dans la seconde celui en dessous de  $\Delta T_c$ .

#### Dynamique à haute température : au-dessus de $\Delta T_c$

Afin d'étudier les mouvements individuels des grains, nous avons calculé pour chacun son déplacement quadratique moyen selon l'horizontale (i.e. selon l'axe  $x$ ). Nous nous restreignons aux seuls mouvement selon  $x$  car la gravité induit un mouvement moyen vers le bas. Comme nous l'avons vu, cet écoulement est inhomogène et il est difficile de soustraire cette composante dans le mouvement des grains. Pour chaque grain nous calculons donc :

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle (x(nT + \tau) - x(nT))^2 \rangle \quad (\text{C.5})$$

où  $\tau$  est un multiple de la période d'excitation et la moyenne  $\langle \dots \rangle$  porte sur le temps, c'est-à-dire le nombre de cycles. Bien que dans les simulations, le fluage de la colonne n'ait pas atteint un régime stationnaire, la compaction est très faible et les grains se déplacent très peu. Ceci justifie le fait que l'on moyenne le déplacement quadratique moyen sur le temps.

La figure C.14 présente alors un exemple de déplacement quadratique moyen pour une colonne de  $L = 40d$  soumis à des cycles d'amplitude  $\Delta T = 5.10^{-3} > \Delta T_c$ . Ce déplacement a été calculé pour tous les grains, puis moyenné sur des tranches d'épaisseur  $d$  et de largeur  $L$ . Ainsi, la figure C.14 représente le déplacement quadratique moyen des grains en fonction de  $\tau$  pour différentes altitudes. Les courbes en rouge symbolisent les positions dans le bas de la colonne et les courbes en violet les positions aux sommets de la colonne.

Le déplacement quadratique moyen est une fonction croissante de  $\tau$  et cette quantité dépend également de la hauteur à laquelle on la calcule. On distingue deux comportements. Vers le bas de l'empilement, les grains ont un mouvement de cage. En

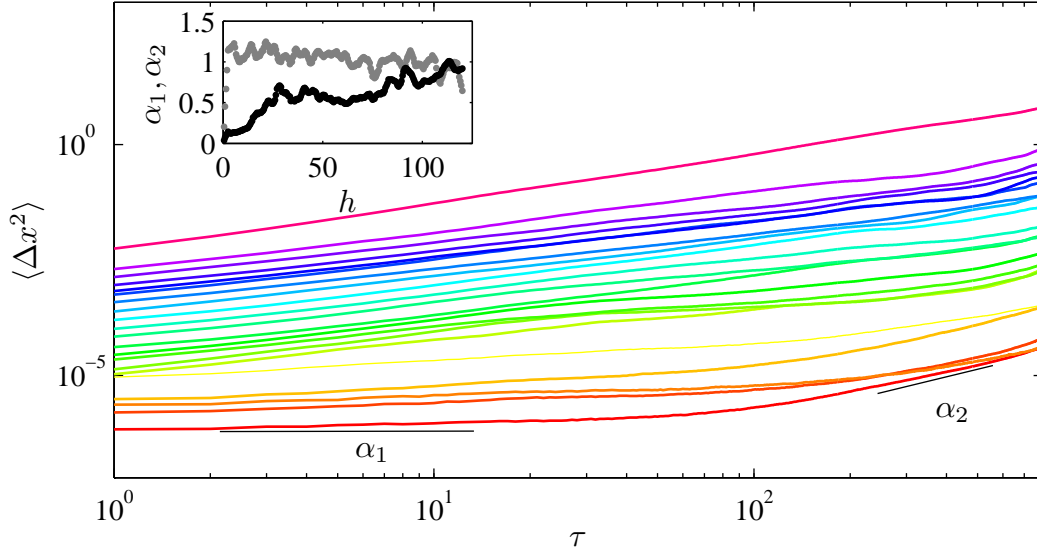


FIGURE C.14 – **Déplacement quadratique moyen  $\langle \Delta x^2 \rangle$  des grains en fonction du temps  $\tau$  mesuré en nombre de cycles et pour différentes hauteurs** (violet : bas de la colonne, rouge : haut de la colonne). On observe deux comportements différents selon la hauteur : en bas les grains ont un mouvement diffusif à temps long, en haut les grains sont purement diffusifs. Dans l’encart nous avons tracé les pentes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de  $\langle \Delta x^2 \rangle$  en fonction de  $h$  et mesuré respectivement aux temps courts et aux temps longs. On remarque que le mouvement passe continûment d’un mouvement de cage à un mouvement diffusif.

effet, à temps court  $\langle \Delta x^2 \rangle$  présente un plateau alors qu’aux temps longs,  $\langle \Delta x^2 \rangle$  augmente avec  $\tau$ . De plus, aux temps longs, les grains présentent un comportement diffusif ( $\langle \Delta x^2 \rangle \sim \tau$ ). En montant dans la colonne, le temps de vie des cages diminue et le mouvement des grains finit par être purement diffusif. Afin, de quantifier cette transition, nous avons calculé la pente de  $\langle \Delta x^2 \rangle$  en échelle logarithmique aux temps courts ( $\alpha_1$ ) ainsi qu’aux temps long ( $\alpha_2$ ). Ces deux pentes sont tracées en insert de la figure C.14. On remarque alors que  $\alpha_2$  fluctue autour de 1, alors que  $\alpha_1$  vaut 0 en bas de la colonne et augmente avec la hauteur  $h$  pour tendre vers 1. La transition entre les mouvement de cage et les mouvements purement diffusifs se fait donc de manière continue dans la hauteur de la colonne. Nous n’avons pas retrouvé ici d’influence de la hauteur caractéristique  $h_c$ . À titre d’illustration, sur la figure C.15 nous avons tracé un exemple de trajectoire de grain montrant un mouvement de cage.

Nous observons ici un mouvement diffusif des grains dans le haut de la colonne à l’instar d’autres études dans la littérature portant sur des mécanismes de sollicitation différents (Utter et Behringer [2004]; Wandersman et al. [2012]). De même, le mouvement des grains dans le bas de la colonne est aussi diffusif, mais seulement à temps long. Il est alors possible de définir un coefficient de diffusion  $D$  via la relation suivante :

$$D(h, \Delta T) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{\tau} \quad (\text{C.6})$$

Concrètement,  $D$  est calculé en moyennant le rapport entre  $\langle \Delta x^2 \rangle / n$  sur les 750 derniers

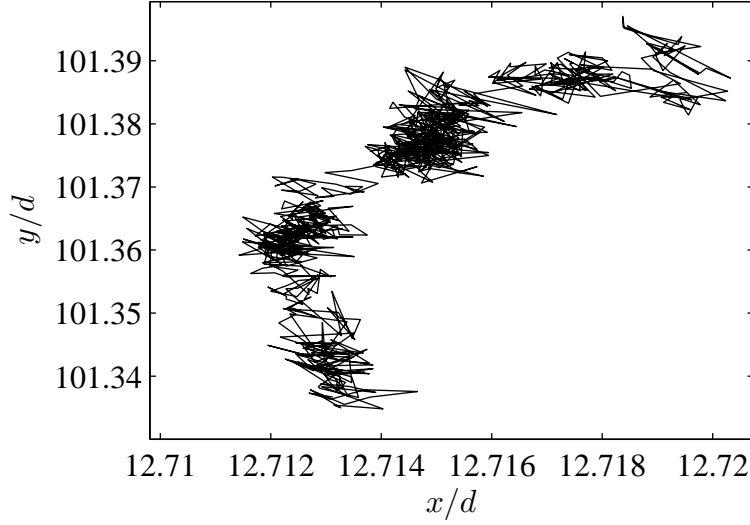


FIGURE C.15 – **Exemple de trajectoire d'un grains au cours d'une simulation** pour une amplitude de cycle  $\Delta T = 0.005$ . Ce grain situé vers le centre de la colonne présente un mouvement de cage. On peut cependant remarquer que la taille des cages est plus petite que la taille du grain. Les sorties de cage observés sont finalement plutôt des mouvements d'ensemble du grain et de la cage l'entourant.

cycles de la simulation. Ce coefficient de diffusion dépend alors de l'altitude dans la colonne comme nous pouvons directement le voir sur la figure C.16a), mais il dépend aussi de l'amplitude des cycles de température  $\Delta T$ . Ce coefficient de diffusion permet de faire des analogies avec l'existence d'une température effective au sein du milieu granulaire. En effet, la relation de Stokes-Einstein *généralisée*<sup>1</sup> donne :

$$D = \frac{k_B T_{eff}}{2\pi\eta r} \quad (C.7)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T_{eff}$  une température effective et  $\eta$  la viscosité du milieu. Dans le cas d'un milieu granulaire cette viscosité est donnée par  $\eta = \mu P / \dot{\gamma}$ , où  $P$  est la pression au sein de l'empilement et  $\dot{\gamma}$  le taux de cisaillement local. En pratique, nous avons accès au champs de pression  $P$  comme nous avons pu le voir sur la figure C.12. Cependant, nous ne connaissons, *a priori*, ni  $\dot{\gamma}$  ni  $T_{eff}$ , et cette température effective est certainement une fonction du taux de cisaillement qui lui même est fonction de la hauteur dans la colonne. Nous nous sommes toutefois rendu compte, que les données se regroupent sur une courbe maîtresse en traçant le produit  $DP$  en fonction de  $h\Delta T$ . Sur la figure C.16b), nous avons tracé  $DP$  en fonction de  $(h\Delta T)^4$ . bien que les données soient très bruitées, on peut raisonnablement accepter qu'elles s'alignent toutes sur une même droite de pente 1.

Ainsi, nous avons :

---

1. Il est important de noter, qu'ici, les conditions d'application de la relation de Stokes-Einstein ne sont pas vérifiées. Il est alors possible de définir une température effective en généralisant la loi de Stokes-Einstein.

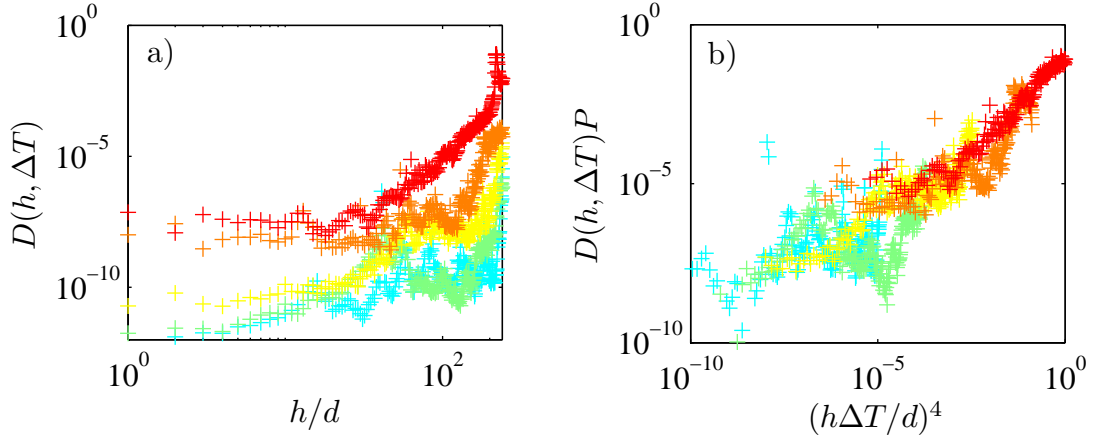


FIGURE C.16 – a) Coefficient de diffusion des grains en fonction de la hauteur dans la colonne  $h$  pour différentes amplitudes de cycle. b) Produit  $DP$  en fonction de  $(\Delta Th)^4$ . Bien que les données soient très bruitées, le graphe semble indiquer qu'elles s'alignent sur une droite de pente 1. (bleu :  $\Delta T = 2.5 \cdot 10^{-4}$ , vert :  $\Delta T = 5 \cdot 10^{-4}$ , jaune :  $\Delta T = 10^{-4}$ , orange :  $\Delta T = 2.5 \cdot 10^{-3}$ , rouge :  $\Delta T = 5 \cdot 10^{-3}$ )

$$D \sim \frac{(\Delta Th)^4}{P}. \quad (\text{C.8})$$

Le produit  $k_B T_{eff} \dot{\gamma}$  se comporte alors comme  $(h\Delta T)^4$ . Comme, nous n'avons pas d'expression pour le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , il n'est pas possible d'extraire une température effective. Une étude similaire a été effectuée par Harich [2011] dans un milieu granulaire vibré. Les auteurs calculent également le coefficient de diffusion des grains et aboutissent à la même conclusion : tant que l'on ne connaît pas le taux de cisaillement local des grains on ne peut pas calculer la température effective des grains. Notre étude montre cependant que le coefficient de diffusion varie proportionnellement à  $1/P$  comme l'ont également trouvé Wandersman et al. [2012]. Leur expérience consiste en une cuve cylindrique rempli de grains, un disque tournant est installé au fond de la cuve et impose un cisaillement au milieu granulaire. Les grains ont alors un mouvement d'ensemble orthoradial, et les auteurs mettent en évidence que le mouvement radial des grains est diffusif. Le coefficient de diffusion qui est alors extrait se comporte comme :  $d^3 \dot{\gamma} / P$ . Bien que l'on trouve le même comportement vis-à-vis de la pression, la dépendance en  $d$  est différente. En effet, d'après la formule C.8 le coefficient de diffusion  $D$  des grains soumis à des cycles de température se comporte comme  $1/d^4$ . Cette différence peut provenir du mode d'excitation des grains qui, ici, agit sur chaque grain individuellement et non pas sur un des bords du récipient les contenant. Une des perspectives de ce travail est donc d'obtenir une interprétation physique microscopique de la valeur du coefficient de diffusion.

Afin de quantifier le mouvement des grains nous avons également calculé pour chacun sa densité de probabilité d'avoir un déplacement horizontal  $\delta x$  entre deux cycles successifs. Nous avons, ici aussi, moyenné ces densités de probabilités dans le temps et sur des tranches d'un grain d'épaisseur s'étendant toute la largeur de la colonne. Sur la figure C.17, cinq densités de probabilités sont tracées pour une même amplitude

( $\Delta T = 5.10^{-3}$ ) et à des altitudes différentes. Pour assurer une meilleure visibilité les courbes ont été translatées verticalement. On constate alors que l'allure des densités de probabilité change en fonction de la hauteur. Dans la bas de la colonne, elles ont l'allure de gaussienne, alors que vers le sommet de l'empilement elles présentent des queues exponentielles. Ceci signifie que le haut de la colonne est plus sujet aux événements rares que le bas. Ce type de comportement qui a déjà été observé dans des matériaux vitreux par Chaudhuri et al. [2007] est compatible avec l'allure des déplacements quadratiques moyens. En effet, les sorties de cages correspondent aux événements rares et élargissent les queues des distributions. Comme nous l'avons vu, dans le bas de la colonne les grains restent dans leur cage à temps courts les distributions de  $\delta x$  sont alors gaussiennes, alors que dans le haut, les grains n'ont pas de mouvement de cage. Afin de quantifier cette transition nous avons modélisé les densités de probabilité par des fonctions de Student (Chung [1946]; Fisher [1925]) :

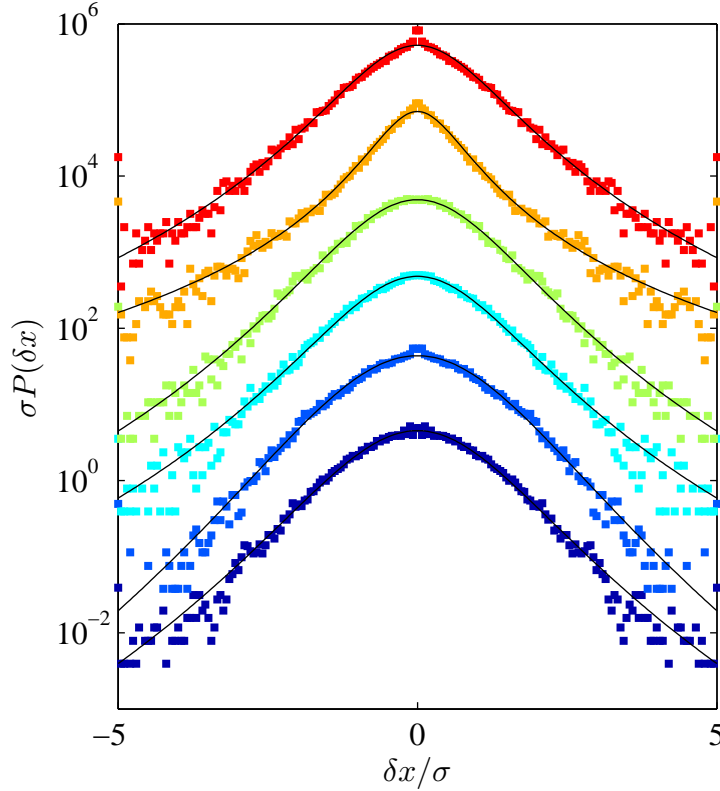


FIGURE C.17 – **Densité de probabilité d'avoir un déplacement  $\delta x$  entre deux cycles successifs.** Pour plus de lisibilité nous avons translaté les différentes courbes correspondant aux différentes altitudes dans la colonne. On remarque que ces densités de probabilité sont bien modélisées par des fonctions de Student (courbes en traits noirs), passant d'une distribution gaussienne dans le bas de la colonne à une distribution plus large en haut.

$$f(\delta x) = \frac{1}{\zeta \sqrt{\phi k}} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(1 + \frac{\delta x^2}{k \zeta^2}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \quad (\text{C.9})$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler,  $k$  est appelé le nombre de degrés de liberté de la

distribution et  $\zeta$  est un paramètre de mise à l'échelle. Cette distribution tend vers une gaussienne lorsque  $k$  tend vers l'infini et possède des queues qui s'élargissent à mesure que  $k$  tend vers 0. Ainsi, le paramètre  $k$  donne un renseignement sur la statistique des fluctuations extrêmes au sein de la colonne. Le paramètre  $\zeta$ , ne change pas la forme de la distribution. Il s'agit uniquement d'un facteur de mise à l'échelle. Nous avons fait ce choix de fonction car en variant le paramètre  $k$  les fonctions de Student peuvent passer de manière continue d'une gaussienne à une distribution à queues larges. Le nombre de degrés de liberté  $k$  permet alors de quantifier la transition de forme que l'on observe le long de la hauteur.

On constate, tout d'abord sur la figure C.17 que les fonctions de Student modélisent bien les densités de probabilité  $P(\delta x)$ . Le paramètre  $k$  dépend alors de la hauteur dans la colonne (figure C.18) et on peut constater à nouveau que lorsque les grains ont une dynamique de cage,  $k$  est grand et donc  $P(\delta x)$  suit une loi gaussienne. A l'inverse, lorsque les grains ont un mouvement diffusif alors  $k$  vaut environ 2 et donc les fluctuations  $\delta x$  atteignent des valeurs extrêmes.

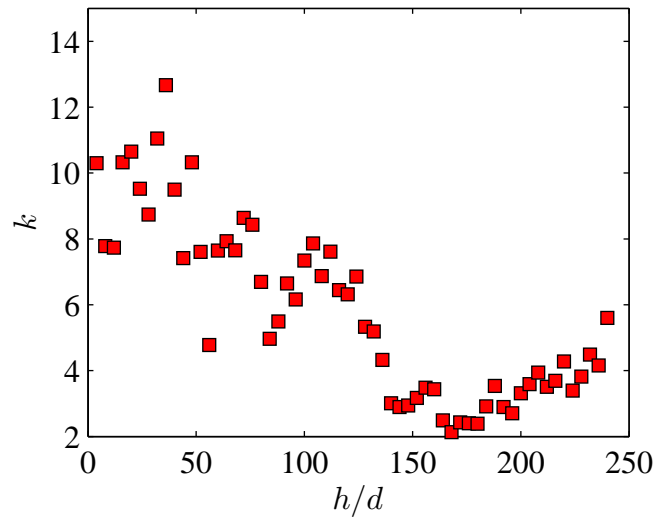


FIGURE C.18 – Évolution du nombre de degrés de liberté de la distribution de Student en fonction de la hauteur dans la colonne pour une amplitude de cycles  $\Delta T = 5.10^{-3}$ . On remarque que celui-ci décroît à mesure que l'on monte dans la colonne, ce qui signifie que les queues des distributions s'élargissent. Ainsi, les évènements extrêmes sont plus courants dans le haut de la colonne que dans le bas.

On peut également souligner le fait que les densités de probabilités d'un déplacement  $\delta r$  selon  $x$  et  $y$  ont la même allure que celles obtenues par Pouliquen et al. [2003] en cisillant les grains (figure C.19). Dans leur expériences, des disques sont placés dans une boîte parallélépipédique verticale effectuant un mouvement d'essuie-glace. En appliquant un cisaillement à l'ensemble, l'empilement se compacte. Dans leur étude, les auteurs montrent que la compaction augmente avec l'amplitude du cisaillement. De plus, les grains présentent ici aussi un mouvement de cage. Ceci prouve alors que dans



ces deux dispositifs, *a priori* différents, la compaction se fait via les mêmes mécanismes physiques.

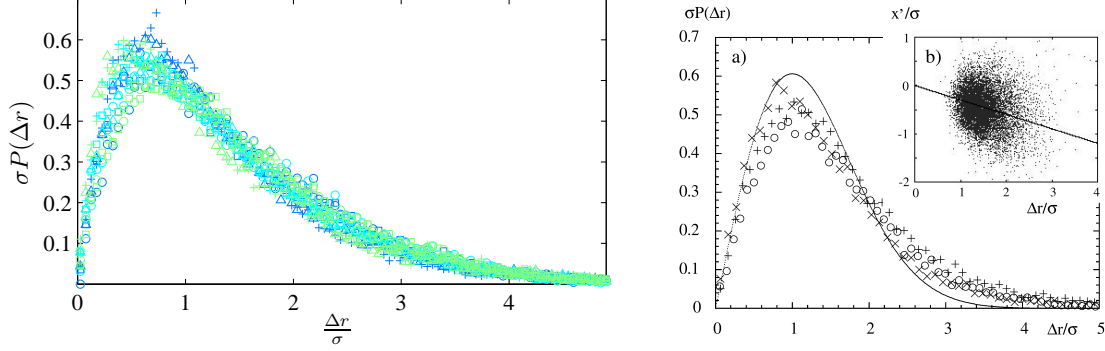


FIGURE C.19 – À gauche, densités de probabilités qu'un grain ait un déplacement  $\delta r$  entre deux cycles successifs. Celles-ci ressemblent fortement aux densités mesurées par Pouliquen et al. [2003] dans un système 2D de grains cisailés (à droite). Le graphe dans l'encart représente la probabilité d'avoir un déplacement à l'issue du cycle  $n+1$  qui soit dans le même sens que celui à l'issue du déplacement  $n$ .

### Dynamique à faibles températures : en dessous de $\Delta T_c$

Pour  $\Delta T < \Delta T_c$ , la dilatation des grains n'est pas suffisante pour mobiliser complètement les contacts entre les grains. Ainsi, à l'échelle macroscopique la colonne se compacte par sauts séparés par des périodes de repos. Cette dynamique a été observée par Divoux et al. [2008] lors de cycles de température. Une dynamique intermittente similaire est observée lors du déplacement d'un intrus dans milieu granulaire vibré (Harich et al. [2011]). Dans cette situation, l'intrus se déplace par *sauts* au sein de l'empilement. Ainsi, l'étude des propriétés statistiques de ces sauts de compacité dans notre système semble prometteuse. Cependant, par manque de temps, nous ne l'avons pas réalisé au cours de la thèse<sup>2</sup>.

L'analyse des simulations effectuées nous a tout de même permis de mettre en évidence que le déplacement des grains est très hétérogène. En effet, les déplacements induisent des *points chauds* qui apparaissent et disparaissent au cours du temps. Cette terminologie est inspirée des travaux de Djaoui et Crassous [2005] et Amon et al. [2012]. Dans leurs études les mouvements de grains cisailés sont observés par une technique de diffusion de la lumière. Les auteurs montrent alors que le déplacement des grains est très hétérogène et qu'il apparaît, en différents endroits du milieu granulaire, des zones dans lesquelles le déplacement des grains est bien plus grand qu'ailleurs. Ces zones appelés *points chauds* sont des précurseurs de la rupture du milieu. Ceux obtenus dans nos simulations sont représentés sur les figure C.20b) et C.20c). Les points chauds sont définis comme l'ensemble des grains dont le déplacement est supérieur à cinq fois le déplacement moyen des grains. Ce critère est arbitraire, mais les conclusions de cette

2. Nous rappelons que chaque simulation dure environs deux semaines, afin d'obtenir suffisamment de statistique il aurait fallu laisser tourner les simulations encore plus longtemps. Une solution à cela serait de paralléliser le code et de le faire tourner sur une grille de calcul.



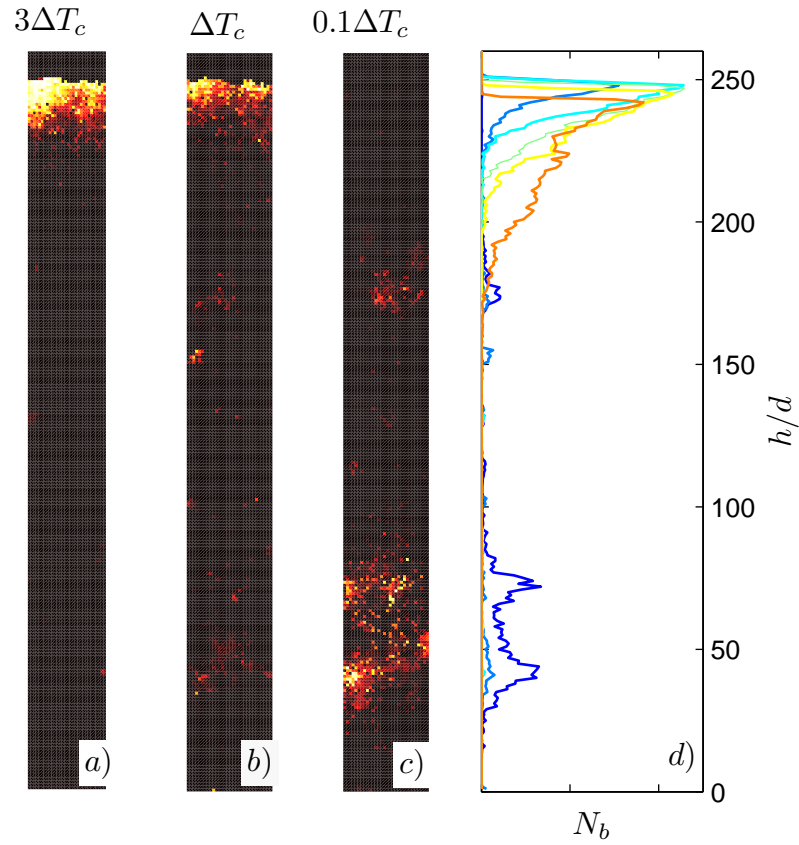


FIGURE C.20 – a)b)c) **Cartographie des points chauds apparaissant dans la colonne.** L’amplitude de température vaut respectivement  $3\Delta T_c$ ,  $1.1\Delta T_c$ ,  $0.1\Delta T_c$ . On constate alors qu’à haute température le dynamique est surtout localisée en surface, mais à mesure que l’amplitude des cycles diminue, l’activité dans grains se fait majoritairement en volume. Ceci est confirmé sur la sous-figure d) **représentant le profil d’apparition des points chauds** selon la hauteur de la colonne.

étude ne dépendent pas drastiquement de ce choix. On remarque que les points chauds apparaissent dans le coeur de l’empilement pour les températures les plus faibles, puis à mesure que la température augmente, ils se localisent vers le sommet. Sur la figure C.20 nous avons représenté les points chauds pour  $\Delta T = 3\Delta T_c$ , ceux-ci sont exclusivement dans le haut de la colonne. Ces données sont regroupées sur la figure C.20 présentant le nombre de points chauds en fonction de la hauteur dans la colonne à différents  $\Delta T$ . Nous pouvons alors faire un parallèle avec les études de Amon et al. [2012] pour des grains cisailés par un rhéomètre en géométrie *vane cup* (une tige dotée de pales est mise en rotation à l’intérieur de grains contenus dans un réservoir cylindrique) à couple imposé. Les auteurs ont mis en évidence qu’à faible excitation le déplacement des grains se faisait par points chauds répartis dans tout l’échantillon. Puis à fur et à mesure que le couple imposé augmente, les points chauds se localisent pour ensuite former une bande de cisaillement. Dans nos simulations de cycles de température, les points chauds apparaissent également dans tout l’échantillon à faible excitation puis se

localisent au-delà de la température critique.

### C.2.5 Conclusion

Bien que les simulations numériques que nous avons effectuées modélisent la dilatation des grains de façon simpliste, elles permettent de retrouver l'ensemble des phénomènes observés expérimentalement. La courbe maitresse de la figure C.10 prouve que la rugosité des grains et leur module d'Young jouent un rôle similaire dans le processus de compaction à travers un unique paramètre de contrôle  $\Delta T_l$ . En pratique, ceci signifie que pour une amplitude donnée, des grains mous et lisses (petits  $k$  et  $k_t$ ) sont moins sensibles aux variations de température que des grains durs et rugueux (grands  $k$  et  $k_t$ ). En particulier, ce paramètre  $\Delta T_l$  permet de rendre compte de l'apparition des deux régimes de compaction : réarrangements isolés et compaction par saut d'une part et écoulement continu d'autre part. Ceci explique également pourquoi des grains lubrifiés se compactent plus rapidement que des grains secs (Slotterback et al. [2008]).

La dynamique locale des grains est alors très différente dans les deux cas. Au-dessus de  $\Delta T_l$ , le mouvement des grains dépend de leur altitude. En bas de la colonne, ils présentent un mouvement de cage avec une diffusion à temps long. Dans le haut de la colonne, le mouvement des grains est purement diffusif. Dans les deux cas, en se plaçant à temps suffisamment long nous avons pu mesurer un coefficient de diffusion. À l'instar des travaux de Wandersman et al. [2012], celui-ci est inversement proportionnel à la pression dans la colonne. Nous avons également pu mettre en évidence qu'il suit une loi d'échelle en  $(\Delta Th)^4$  dont l'interprétation physique reste floue. L'étude des densités de probabilité des déplacements ont aussi révélé un comportement dépendant de l'altitude en accord avec les observations faites sur les déplacements quadratiques moyens. Dans le bas de la colonne, les positions des grains ont des fluctuations gaussiennes, alors que vers le haut celles-ci ont une distribution avec des queues plus larges. Il est possible de modéliser ces densités de probabilité par des fonctions de Student, dont le nombre de degrés de liberté permet de quantifier à quel point les fluctuations des grains s'éloignent d'une distribution gaussienne.

En dessous de  $\Delta T_l$ , le mouvement des grains est intermittent et fait apparaître des points chauds. Ceux-ci sont répartis dans l'ensemble de la colonne et se localisent de plus en plus vers le haut à mesure que l'amplitude de température se rapproche de  $\Delta T_l$ . Une plus vaste étude sera alors nécessaire afin de caractériser ces points chauds. On pourrait calculer leur taille, leur fréquence d'apparition et leur nombre en fonction de la température comme ont pu le faire Marty et Dauchot [2005] et Candelier et al. [2009].

Une autre perspective intéressante liée aux cycles de température est l'étude du mouvement d'un intrus. En effet, il a été observé que des pierres enterrées peuvent se déplacer dans le sol sous l'effet des cycles de gel et de dégel. C'est un phénomène bien connu des agriculteurs, qui doivent à chaque printemps ramasser les cailloux remontés dans les champs pendant l'hiver. On peut alors introduire un intrus dans la colonne de grains et observer son mouvement lorsque l'on soumet l'ensemble à des cycles de température. Des simulations préliminaires ont été effectuées, elles sont illustrées sur la figure C.21. On remarque que dans ce cas, l'intrus remonte à la surface de la colonne. On pourrait alors comparer les résultats obtenus avec ceux du fameux *Brazil nut effect*

(Kudrolli [2004]).

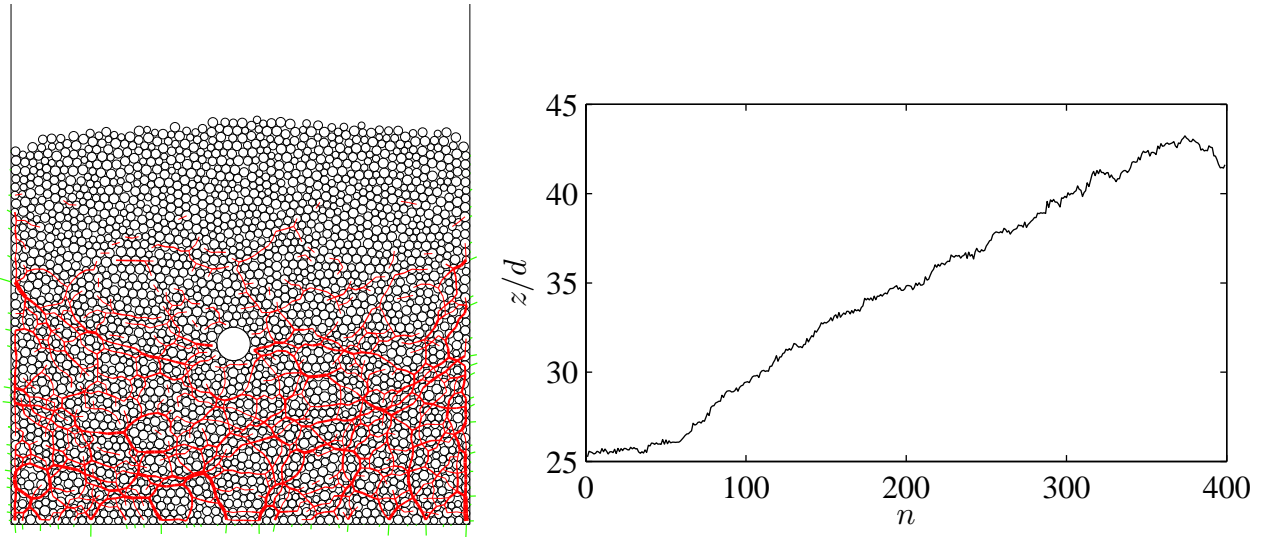


FIGURE C.21 – À gauche, empilement de grains contenant un intrus, son rayon est quatre fois plus grand que celui des autres grains. On soumet l'ensemble des grains à une variation de température et sous certaines conditions (intrus suffisamment léger et amplitude suffisamment élevée), l'intrus monte dans la colonne. Un exemple est représenté sur le graphe de droite sur lequel est tracée l'altitude de l'intrus en fonction du nombre de cycles pour un intrus de masse  $10 m$  de taille  $4 d$  et avec une amplitude de cycle  $\Delta T = 0.01$ . Pour une telle amplitude de la convection commence à s'installer dans la colonne et celle-ci accélère la montée de l'intrus. Pour des amplitudes plus faibles l'intrus monte beaucoup moins vite.



# Bibliographie

- Aguirre, M. A., Grande, J. G., Calvo, A., Pugnaloni, L. A., et Géminard, J.-C. (2010). Pressure independence of granular flow through an aperture. *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 238002.
- Ahlbeck, D. R. et Daniels, L. E. (1991). Investigation of rail corrugations on the baltimore metro. *Wear*, **144**, 197 – 210.
- Al-Regib, E., Ni, J., et Lee, S.-H. (2003). Programming spindle speed variation for machine tool chatter suppression. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **43**, 1229 – 1240.
- Allen, M. et Tildesley, D. (1987). Oxford University Press.
- Amon, A., Nguyen, V. B., Bruand, A., Crassous, J., et Clément, E. (2012). Hot spots in an athermal system. *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 135502.
- Andreotti, B., Claudin, P., et Douady, S. (2002a). Selection of dune shapes and velocities - Part 1 : Dynamics of sand, wind and barchans. *European Physical Journal B*, **28**, 321–339.
- Andreotti, B., Claudin, P., et Douady, S. (2002b). Selection of dune shapes and velocities - Part 2 : A two-dimensional modelling. *European Physical Journal B*, **28**, 341–352.
- Bahr, D. B., Pfeffer, W. T., et Browning, R. C. (2009). The surprising motion of ski moguls. *Physics Today*, page 68.
- Beverloo, W., Leniger, H., et van de Velde, J. (1961). The flow of granular solids through orifices. *Chemical Engineering Science*, **15**, 260–269.
- Bitbol, A.-F., Taberlet, N., Morris, S. W., et McElwaine, J. N. (2009). Scaling and dynamics of washboard roads. *Phys. Rev. E*, **79**, 61308.
- Blondeaux, P. (1990). Sand ripples under sea waves .1. ripple formation. *Journal of Fluid Mechanics*, **218**, 1–17.
- Blumenfeld, R. et Edwards, S. F. (2003). Granular entropy : Explicit calculations for planar assemblies. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 114303.

- Blumenfeld, R., Jordan, J. F., et Edwards, S. F. (2012). Interdependence of the volume and stress ensembles and equipartition in statistical mechanics of granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 238001.
- Bocquet, L. (2003). The physics of stone skipping. *American Journal of Physics*, **71**, 150–155.
- Boyer, F. m. c., Guazzelli, E., et Pouliquen, O. (2011). Unifying suspension and granular rheology. *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 188301.
- Breu, A. P. J., Ensner, H.-M., Kruehle, C. A., et Rehberg, I. (2003). Reversing the brazil-nut effect : Competition between percolation and condensation. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 014302.
- Brown, R. L. et Richards, J. C. (1970). *Principles of Powder Mechanics*. Pergamon Press.
- C. R. Wassgren, J. A. Cordova, R. Z. et Karion, A. (2003). Dilute granular flow around an immersed cylinder. *Physics of Fluids*, **15**, 3318–3330.
- Candelier, R., Dauchot, O., et Biroli, G. (2009). Building Blocks of Dynamical Heterogeneities in Dense Granular Media. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 1–4.
- Charru, F. et Mouilleron-Arnould, H. (2002). Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **452**, 303–323.
- Chaudhuri, P., Berthier, L., et Kob, W. (2007). Universal nature of particle displacements close to glass and jamming transitions. *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 060604.
- Chehata, D., Zenit, R., Wassgren, C. R., Cordova, J. A., C. R. Wassgren J. A. Cordova, R. Z., et Karion, A. (2003). Dilute granular flow around an immersed cylinder. *Physics of Fluids*, **15**, 3318–3330.
- Chen, K., Harris, A., Draskovic, J., et Schiffer, P. (2009). Granular fragility under thermal cycles. *Granular Matter*, **11**, 237–242.
- Chiou, Y., Chung, E., et Liang, S. (1995). Analysis of tool wear effect on chatter stability in turning. *International Journal of Mechanical Sciences*, **37**, 391 – 404.
- Chladni, E. F. F. (1809). *Traité d’acoustique*.
- Chung, K. L. (1946). The approximate distribution of student’s t statistic. *Annals of Mathematical Statistics*, **17**, 447.
- Clément, E., Serero, Y., Lanuza, J., Rajchenbach, J., et Duran, J. (1997). Fluctuating aspects of the pressure in a granular column. *Powder and grains*, **97**.
- Collette, C. et Preumont, A. (2009). Laser measurement of torsional vibrations/longitudinal creepage of a railway wheel set on a scaled test bench. *Optics and Lasers in Engineering*, **47**, 385 – 389.

- Collette, C., Vanhonacker, P., Bastaits, R., et Levy, D. (2008). Comparison between time and frequency studies of a corrugated curve of rer paris network. *Wear*, **265**, 1249 – 1258.
- Condotta, R. (2005). *Coulabilité des poudres cohésives : mesures aux faibles contraintes, granulaires humides et application à une poudre industrielle*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- Conway, S. L., Shinbrot, T., et Glasser, B. J. (2004). A Taylor vortex analogy in granular flows. *Nature*, **431**, 433–7.
- Costantino, D., Bartell, J., Scheidler, K., et Schiffer, P. (2011a). Low-velocity granular drag in reduced gravity. *Physical Review E*, **011305**, 2009–2012.
- Costantino, D. J., Bartell, J., Scheidler, K., et Schiffer, P. (2011b). Low-velocity granular drag in reduced gravity. *Phys. Rev. E*, **83**, 11305.
- Costantino, D. J., Scheidemantel, T. J., Stone, M. B., Conger, C., Klein, K., Lohr, M., Modig, Z., et Schiffer, P. (2008). Starting to Move through a Granular Medium. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 108001.
- Cotgrove, L. (1988). Calender barring - causes and cures. *Pulp and Paper Mill Equipment*.
- Crassous, J., Erpelding, M., et Amon, A. (2009). Diffusive waves in a dilating scattering medium. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 013903.
- Cundall, P. A. et Strack, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, **29**.
- Daerr, A. (2001). Dynamical equilibrium of avalanches on a rough plane. *Physics of Fluids*, **13**, 2115–2124.
- Dai, Q., Hendriks, F., et Marchon, B. (2004a). Modeling the washboard effect at the head/disk interface. *Journal of Applied Physics*, **96**, 696–703.
- Dai, Q., Hendriks, F., et Marchon, B. (2004b). Washboard effect at head-disk interface. *IEEE Transactions on Magnetics*, **40**, 3159–3161. 9th Joint Magnetism and Magnetic Materials Conference/ International Magnetism Conference, Anaheim, CA, JAN 05-09, 2004.
- de Bock, J. (2006). Corrugation - wheel rail corrugation in urban transport. *CORRU-GATION*.
- Ding, Y., Gravish, N., et Goldman, D. I. (2011). Drag Induced Lift in Granular Media. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 28001.
- Divoux, T., Gayvallet, H., et Géminard, J.-C. (2008). Creep motion of a granular pile induced by thermal cycling. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 148303.



- Djaoui, L. et Crassous, J. (2005). Probing creep motion in granular materials with light scattering. *Granular Matter*, **7**, 185–190.
- Eadie, D. T., Kalousek, J., et Chiddick, K. C. (2002). The role of high positive friction (hpf) modifier in the control of short pitch corrugations and related phenomena. *Wear*, **253**, 185 – 192.
- Egger, J. (2002). Hump pattern generation on ski slopes. *Physica D*, **165**, 127–136.
- Emmanuel, A. (1985). Some experiences with calendar barring on a newsprint machine and diagnosis of roll corrugation. *Appita*, **38**, 269–274.
- Eshuis, P., van der Weele, K., van der Meer, D., Bos, R., et Lohse, D. (2007). Phase diagram of vertically shaken granular matter. *Physics of Fluids*, **19**, 123301.
- Fisher, R. A. (1925). Applications of student's distribution. *Metron*, **5**, 90.
- Forterre, Y. et Pouliquen, O. (2001). Longitudinal vortices in granular flows. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5886–5889.
- Géminard, J.-C. et Gayvallet, H. (2001). Thermal conductivity of a partially wet granular material. *Phys. Rev. E*, **64**, 041301.
- Goldhirsch, I. et Zanetti, G. (1993). Clustering instability in dissipative gases. *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1619–1622.
- Grassie, J. et Elkins, S. (1993). Rail corrugation on north american transit systems. *Journal of Rail and Rapid Transit*, **207**, 57–68.
- Grassie, S. L. (1996). Short wavelength rail corrugation : field trials and measuring technology. *Wear*, **191**, 149 – 160.
- Grassie, S. L. et Kalousek, J. (1998). Rail corrugation : Characteristics, causes and treatments. *Vehicle System Dynamics Supplement*, **28**, 5–17.
- Gravish, N., Umbanhowar, P. B., et Goldman, D. I. (2010). Force and Flow Transition in Plowed Granular Media. *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 128301.
- Gray, J. M. N. T. et Chugunov, V. A. (2006). Particle-size segregation and diffusive remixing in shallow granular avalanches. *Journal of Fluid Mechanics*, **569**, 365–398.
- Guillard, F. m. c., Forterre, Y., et Pouliquen, O. (2013). Depth-independent drag force induced by stirring in granular media. *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 138303.
- Guo, H., Goldsmith, J., Delacruz, I., Tao, M., Luo, Y., et Koehler, S. a. (2012). Semi-infinite plates dragged through granular beds. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, **2012**, P07013.
- Guyon, E. et Troadec, J. P. (1994). *Du sac de billes au tas de sable*. Edition Odile Jacob.
- Hagen, G. (1839). . *Ann. Phys. Chem.*, **423**.



- Halsey, T. C. et Levine, A. J. (1998). How sandcastles fall. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 3141–3144.
- Harich, R. (2011). *Etude expérimentale de la transition Jamming dans un milieu granulaire vibré*. PhD thesis, UPMC.
- Harich, R., Darnige, T., Kolb, E., et Clément, E. (2011). Intruder mobility in a vibrated granular packing. *EPL (Europhysics Letters)*, **96**, 54003.
- Hempelmann, K. et Knothe, K. (1996a). An extended linear model for the prediction of short pitch corrugation. *Wear*, **191**, 161–169.
- Hempelmann, K. et Knothe, K. (1996b). An extended linear model for the prediction of short pitch corrugation. *Wear*, **191**, 161–169.
- Herrmann, H., Andrade, J., Schatz, V., Sauermann, G., et Parteli, E. (2005). Calculation of the separation streamlines of barchans and transverse dunes. *Physica A*, **357**, 44–49. International Workshop on Physics Survey of Irregular Systems, Fortaleza, BRAZIL, AUG 15-18, 2004.
- Hersen, P. (2004). On the crescentic shape of barchan dunes. *European Physical Journal B*, **37**, 507–514.
- Hewitt, I. et Balmforth, N. (2012). Viscoplastic lubrication theory with application to bearings and the washboard instability of a planing plate. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **169-170**, 74–90.
- Hewitt, I. J., Balmforth, N., et McElwaine, J. N. (2011). Continual skipping on water. *Journal of Fluid Mechanics*.
- Hewitt, I. J., Balmforth, N., et McElwaine, J. N. (2012). Granular and fluid washboards. *Journal of Fluid Mechanics*, **692**, 446–463.
- Hilton, J. E. et Cleary, P. W. (2011). Granular flow during hopper discharge. *Phys. Rev. E*, **84**, 011307.
- Hoffmann, N., Ciavarella, M., Stolz, U., et Weiß, C. (2009). The effect of long-wavelength stiffness variation on wear pattern generation. *Journal of Sound and Vibration*, **322**, 785–797.
- Hoffmann, N. P. et Misol, M. (2007). On the role of varying normal load and of randomly distributed relative velocities in the wavelength selection process of wear-pattern generation. *International Journal of Solids and Structures*, **44**, 8718.
- Jaeger, H. M., Nagel, S. R., et Behringer, R. P. (1996). Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.*, **68**, 1259–1273.
- Jaeger, H. M., Shinbrot, T., et Umbanhowar, P. B. (2000). Does the granular matter? *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **97**, 12959–12960.

- Janda, A., Maza, D., Garcimartín, A., Kolb, E., Lanuza, J., et Clément, E. (2009). Unjamming a granular hopper by vibration. *EPL (Europhysics Letters)*, **87**, 24002.
- Janda, A., Zuriguel, I., et Maza, D. (2012). Flow rate of particles through apertures obtained from self-similar density and velocity profiles. *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 248001.
- Kamrin, K. et Koval, G. (2012). Nonlocal constitutive relation for steady granular flow. *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 178301.
- Knight, J. B., Fandrich, C. G., Lau, C. N., Jaeger, H. M., et Nagel, S. R. (1995). Density relaxation in a vibrated granular material. *Phys. Rev. E*, **51**, 3957–3963.
- Kudrolli, A. (2004). Size separation in vibrated granular matter. *Reports on Progress in Physics*, **67**, 209.
- Kurtze, D. A., Hong, D. C., et Both, J. A. (2001). The genesis of washboard roads. *international journal of modern physics B*, **15**, 3344.
- Langlois, V. (2005). *Instabilité d'un lit granulaire cisailé par un écoulement fluide*. PhD thesis, Université Rennes 1.
- Langlois, V. et Valance, A. (2005a). Formation of two-dimensional sand ripples under laminar shear flow. *Phys. Rev. Lett.*, **94**.
- Langlois, V. et Valance, A. (2005b). Three-dimensionality of sand ripples under steady laminar shear flow. *Journal of Geophysical Research*, **110**.
- Leung, O. et Goh, M. (1992). Orientational ordering of polymers by atomic force microscope tip-surface interaction. *Science*, **255**, 64.
- Li, H. et Shin, Y. C. (2007). A study on chatter boundaries of cylindrical plunge grinding with process condition-dependent dynamics. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **47**, 1563 – 1572.
- Lim, E. (2010). Granular leidenfrost effect in vibrated beds with bumpy surfaces. *The European Physical Journal E*, **32**, 365–375.
- Liu, C.-h. (1994). Spatial patterns of sound propagation in sand. *Phys. Rev. B*, **50**, 782–794.
- Liu, C.-h. et Nagel, S. R. (1992). Sound in sand. *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 2301–2304.
- Loiseleux, T., Gondret, P., Rabaud, M., et Doppler, D. (2005). Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow. *Physics of Fluids*, **17**.
- Mankoc, C., Janda, A., Arévalo, R., Pastor, J., Zuriguel, I., Garcimartín, A., et Maza, D. (2007). The flow rate of granular materials through an orifice. *Granular Matter*, **9**, 407–414.
- Manneville, P. (2004). *Instabilités, Chaos et Turbulence*. Edition de l'école Polytechnique.

- Mansard, V. et Colin, A. (2012). Local and non local rheology of concentrated particles. *Soft Matter*, **8**, 4025–4043.
- Marchon, B., Dai, Q., Nayak, V., et Pit, R. (2005). The physics of disk lubricant in the continuum picture. *IEEE Transactions on Magnetism*, **41**, 616–620. 15th Annual Magnetic Recording Conference (TMRC 2004), Boulder, CO, AUG 11-13, 2004.
- Marchon, B., Karis, T., Dai, Q., et Pit, R. (2003). A model for lubricant flow from disk to slider. *IEEE Transactions on Magnetism*, **39**, 2447–2449. International Magnetism Conference, Boston, MAR 30-APR 03, 2003.
- Marty, G. et Dauchot, O. (2005). Subdiffusion and Cage Effect in a Sheared Granular Material. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 1–4.
- Mather, K. B. (1962). The Cause of Road Corrugations and the Instability of surfaces Under Wheel Action Part 2. *Civ. Eng. and Pub. Works Rev.*
- Mather, K. B. (1963). Why do Roads Corrugate? *Scientific American*, **208**, 128–136.
- Matsumoto, A., Sato, Y., Ono, H., Tanimoto, M., Oka, Y., et Miyauchi, E. (2002). Formation mechanism and countermeasures of rail corrugation on curved track. *Wear*, **253**, 178 – 184.
- Mays, D. C. et Faybishenko, B. A. (2000). Washboards in Unpaved Highways as a Complex Dynamic System. *Complexity*, **5**, 51.
- Mazoyer, S., Cipelletti, L., et Ramos, L. (2006). Origin of the Slow Dynamics and the Aging of a Soft Glass. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 8–11.
- Mazoyer, S., Cipelletti, L., et Ramos, L. (2009). Direct-space investigation of the ultraslow ballistic dynamics of a soft glass. *Physical Review E*, **79**, 1–10.
- Meyer, S., Song, C., Jin, Y., Wang, K., et Makse, H. A. (2010). Jamming in two-dimensional packings. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, **389**, 5137 – 5144.
- Midi, G. (2004). On dense granular flows. *The European Physical Journal E*, **14**, 341–365.
- Naylor, M. A., Swift, M. R., et King, P. J. (2003). Air-driven brazil nut effect. *Phys. Rev. E*, **68**, 012301.
- Nedderman, R., Tuzun, U., Savage, S., et Houlsby, G. (1982). The flow of granular materials-i : Discharge rates from hoppers. *Chemical Engineering Science*, **37**, 1597 – 1609.
- Nie, X., Ben-Naim, E., et Chen, S. Y. (2000). Dynamics of vibrated granular monolayers. *EPL (Europhysics Letters)*, **51**, 679.

- Nishimori, H., Yamasaki, M., et Andersen, K. (1998). A simple model for the various pattern dynamics of dunes. *International Journal of Modern Physics B*, **12**, 257–272. Toshiba-Keio Workshop on Current Trends in Complex Systems Research, Tokyo, OCT 29-31, 1996.
- Olafsen, J. S. et Urbach, J. S. (1998). Clustering, order, and collapse in a driven granular monolayer. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 4369–4372.
- Ovarlez, G., Fond, C., et Clément, E. (2003). Overshoot effect in the janssen granular column : A crucial test for granular mechanics. *Phys. Rev. E*, **67**, 060302.
- Ovarlez, G., Kolb, E., et Clément, E. (2001). Rheology of a confined granular material. *Phys. Rev. E*, **64**, 060302.
- Peng, Z., Xu, X., Lu, K., et Hou, M. (2009). Depth dependence of vertical plunging force in granular medium. *Phys. Rev. E*, **80**, 1–5.
- Perge, C., Aguirre, M. A., Gago, P. A., Pugnaloni, L. A., Le Tourneau, D., et Géminard, J.-C. (2012). Evolution of pressure profiles during the discharge of a silo. *Phys. Rev. E*, **85**, 021303.
- Pouliquen, O., Belzons, M., et Nicolas, M. (2003). Fluctuating Particle Motion during Shear Induced Granular Compaction. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 1–4.
- Pouliquen, O., Forterre, Y., et Andreotti, B. (2011). *Les milieux granulaires : entre fluide et solide*. Savoirs Actuels.
- Pouliquen, O. et Vallance, J. W. (1999). Segregation induced instabilities of granular fronts. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **9**, 621–630.
- Prado, G., Amarouchene, Y., et Kellay, H. (2011). Experimental evidence of a rayleigh-plateau instability in free falling granular jets. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 198001.
- Quintana, G. et Ciurana, J. (2011). Chatter in machining processes : A review. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **51**, 363 – 376.
- Restagno, F. (2000). *Interactions entre contacts solides et cinétique de la condensation capillaire. Aspects macroscopiques et aspects microscopiques*. PhD thesis, ENS Lyon.
- Ribière, P., Richard, P., Philippe, P., Bideau, D., et Delannay, R. (2007). On the existence of stationary states during granular compaction. *Eur. Phys. J. E*, **22**, 249–253.
- Ribière, P., Philippe, P., Richard, P., Delannay, R., et Bideau, D. (2005). Slow compaction of granular systems. *Journal of Physics : Condensed Matter*, **17**, S2743.
- Richard, P., Nicodemi, M., Delannay, R., Ribière, P., et Bideau, D. (2005). Slow relaxation and compaction of granular systems. *Nature Materials*, 121–128.
- Richard, P. et Taberlet, N. (2008). Recent advances in dem simulations of grains in a rotating drum. *Soft Matter*, **4**, 1345–1348.

- Riley, J. G. (1971). *unknown*. PhD thesis, Cornell University.
- Riley, J. G. et Furry, R. B. (1973). *unknown*. *Highway Research Record*, **54**, 438.
- Roos, P. et Blondeaux, P. (2001). Sand ripples under sea waves. Part 4. Tile ripple formation. *Journal of Fluid Mechanics*, **447**, 227–246.
- Rosato, A., Strandburg, K. J., Prinz, F., et Swendsen, R. H. (1987). Why the brazil nuts are on top : Size segregation of particulate matter by shaking. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1038–1040.
- Rousseaux, G., Stegner, A., et Wesfreid, J. (2004). Wavelength selection of rolling-grain ripples in the laboratory. *Phys. Rev. E*, **69**.
- Sato, Y., Matsumoto, A., et Knothe, K. (2002). Review on rail corrugation studies. *Wear*, **253**, 130–139.
- Saulot, A. (2006). *Analyse tribologique du contact roue-rail*. PhD thesis, INSA Lyon.
- Schnautz, T., Brito, R., Kruehle, C. A., et Rehberg, I. (2005). A horizontal brazil-nut effect and its reverse. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 028001.
- Seguin, A., Bertho, Y., Gondret, P., et Crassous, J. (2009). Sphere penetration by impact in a granular medium : A collisional process. *Europhysics Letters*, **88**, 44002.
- Seguin, A., Bertho, Y., Gondret, P., et Crassous, J. (2011). Dense Granular Flow around a Penetrating Object : Experiment and Hydrodynamic Model. *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 48001.
- Sheng, G. (2011). Sensing and identification of nonlinear dynamics of slider with clearance in sub-5 nanometer regime. *Advances in Tribology*, **2011**, 282839.
- Siddhpura, M. et Paurobally, R. (2012). A review of chatter vibration research in turning. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **61**, 27 – 47.
- Slotterback, S., Toiya, M., Goff, L., Douglas, J. F., et Losert, W. (2008). Correlation between particle motion and voronoi-cell-shape fluctuations during the compaction of granular matter. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 258001.
- Socoliuc, A., Gnecco, E., Bennewitz, R., et Meyer, E. (2003). Ripple formation induced in localized abrasion. *Phys. Rev. B*, **68**, 115416.
- Stone, M., Barry, R., Bernstein, D., Pelc, M., Tsui, Y., et Schiffer, P. (2004). Local jamming via penetration of a granular medium. *Phys. Rev. E*, **70**, 041301.1–041301.10.
- Suda, Y., Hanawa, M., Okumura, M., et Iwasa, T. (2002). Study on rail corrugation in sharp curves of commuter line. *Wear*, **253**, 193 – 198.
- Taberlet, N., Morris, S. W., et McElwaine, J. N. (2007). Washboard Road : The Dynamics of Granular Ripples Formed by Rolling Wheels. *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 68003.

- Tomeoka, M., Kabe, N., Tanimoto, M., Miyauchi, E., et Nakata, M. (2002). Friction control between wheel and rail by means of on-board lubrication. *Wear*, **253**, 124 – 129.
- Umbanhowar, P., Melo, F., et Swinney, H. L. (1996). Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, **382**.
- Utter, B. et Behringer, R. P. (2004). Self-diffusion in dense granular shear flows. *Phys. Rev. E*, **69**, 031308.
- Valance, A. et Rioual, F. (1999). A nonlinear model for aeolian sand ripples. *European Physical Journal B*, **10**, 543–548.
- Vanel, L., Claudin, P., Bouchaud, J.-P., Cates, M. E., Clément, E., et Wittmer, J. P. (2000). Stresses in silos : Comparison between theoretical models and new experiments. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 1439–1442.
- Vargas, W. L. et McCarthy, J. J. (2007). Thermal expansion effects and heat conduction in granular materials. *Phys. Rev. E*, **76**, 041301.
- Wahlstrom, P., Larsson, K., et Asklof, C. (1963). Calender barring : its mechanism and possible elimination. *Pul and Paper Mag. Can.*, **64**, 194–204.
- Wandersman, E., Dijksman, J. A., et van Hecke, M. (2012). Particle diffusion in slow granular bulk flows. *Europhysics Letters*, **100**, 38006.
- Wieghardt, K. (1975). Experiments in granular flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **89**, 89.
- Wolf, D. E. (1996). *Modelling and Computer Simulation of Granular Media*. Springer Berlin Heidelberg.
- Yang, F., Zhang, B., et Yu, J. (2003). Chatter suppression with multiple time-varying parameters in turning. *Journal of Materials Processing Technology*, **141**, 431 – 438.
- Yang, Y., Munoa, J., et Altintas, Y. (2010). Optimization of multiple tuned mass dampers to suppress machine tool chatter. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **50**, 834 – 842.
- Zatarain, M., Munoa, J., Peigne, G., et Insperger, T. (2006). Analysis of the influence of mill helix angle on chatter stability. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, **55**, 365 – 368.
- Zhang, J. et Rudolph, V. (1991). Effect of shear friction on solid flow through an orifice. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **30**, 1977–1981.
- Zoueshtiagh, F. et Thomas, P. J. (2000). Wavelength scaling of spiral patterns formed by granular media underneath a rotating fluid. *Phys. Rev. E*, **61**, 5588–5592.